

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15

## Verständnisfragen – Hausübung 12

**VF-1:** Sei  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten  $f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  mit den Stützstellen  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $e(x) := f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  der Fehler im Intervall  $I := [\min(a, x), \max(b, x)]$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$e(x_i) = 0$ , $i = 0, \dots, n$ .	wahr
2.	Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi \in I$ , so dass $e(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ .	wahr
3.	Es sei $[c, d] \subsetneq I$ . Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x \in [c, d]$ wie folgt abschätzen: $ e(x)  \leq \max_{z \in [c, d]}  \prod_{i=0}^n (z - x_i)  \max_{z \in [c, d]} \frac{ f^{(n+1)}(z) }{(n+1)!}$ .	falsch
4.	Sei $f(x) = 1/(1+x^2)$ , $x \in [-5, 5]$ . Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n} = -5 + 10j/n$ , $j = 0, \dots, n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [-5, 5]}  f(x) - P(f x_0, \dots, x_n)  = 0$ .	falsch
5.	Es seien $f(0) = 2$ , $f(2) = 4$ und $f(3) = 5$ . Berechne $P(f 0, 2, 3)(1.5)$ .	<b>3.5</b>

**VF-2:** Es sei  $P(f | x_0, \dots, x_n)$  das Interpolationspolynom zu den Daten  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$  mit  $x_0 < \dots < x_n$ , und  $x, x^* \in [x_0, x_n]$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$P(f   x_0, \dots, x_n)$ kann man an der Stelle $x^*$ effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	wahr
2.	$P(f   x_0, \dots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	falsch
3.	$P(f   x_0, \dots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	wahr
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f   x_0, \dots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$	wahr
5.	Es seien $f(x) = \ln(x) + 2x^2$ und $x_0 = 0.5$ , $x_1 = 1$ sowie $x_2 = 2$ . Bestimme $P(f x_0, x_1, x_2)(1)$ .	<b>2</b>

**VF-3:** Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad  $n$ , das die Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  in den Stützstellen  $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$  interpoliert. Es seien  $\delta_n$  der führende Koeffizient dieses Polynoms und  $[x_0, \dots, x_n]f$  die dividierte Differenz der Ordnung  $n$  von  $f$ .

1.	Es gilt: $P(f   x_0, \dots, x_n)(x) = P(f   x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \delta_n \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ .	wahr
2.	Der Fehler $\max_{x \in [a, b]}  P(f   x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) $ ist minimal wenn man die Stützstellen $x_i$ äquidistant wählt.	falsch
3.	Es sei $f$ ein Polynom vom Grad maximal $n$ . Dann gilt: $f(x) = P(f   x_0, \dots, x_n)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ .	wahr
4.	Es gilt: $\delta_n = [x_n, \dots, x_0]f$ .	wahr
5.	Es sei $f(x) = x^3 + 2x^7$ . Gib das kleinste $n$ an, für das $[x_n, \dots, x_0]f = 0$ gilt.	<b>8</b>