

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS15

Verständnisfragen – Klausurmusteraufgabe SS15

VF-1: In dieser Aufgabe betrachten wir die mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Es sei $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ so, dass \bar{x} ein Fixpunkt von Φ und eine einfache Nullstelle von f ist. Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch; bzw. geben Sie einen numerischen Wert mit mindestens fünf signifikanten Ziffern ein!

1.	Es gelte $ \Phi'(\bar{x}) < 1$. Dann konvergiert die Fixpunktiteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ gegen \bar{x} für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.	
2.	\bar{x} ist eindeutig.	
3.	Das Newton-Verfahren zu f konvergiert quadratisch für alle Startwerte x_0 aus einer kleinen Umgebung von \bar{x} .	
4.	Die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes seien erfüllt für Φ . Dann ist Φ Lipschitz-stetig.	
5.	Sei $f(x) := x^2 - 5$ und $x_0 = 5$. Geben Sie die zweite Iterierte des Newton-Verfahrens an.	
6.	Das Newton-Verfahren zu Φ kann gegen \bar{x} konvergieren.	
7.	Das Bisektionsverfahren lässt sich, anders als das Newton-Verfahren, sehr einfach auf mehrdimensionale Problem erweitern.	
8.	Für das Bisektionsverfahren gilt die einfache a-priori Abschätzung $ x_{k+1} - \bar{x} \leq 2^{-k} x_0 - x_1 $.	
9.	Es sei nun zusätzlich $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, und es gelte $ \Phi'(x) < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist das Newton-Verfahren zu f global konvergent.	
10.	Sei $\Phi(x) := x - \tan(x)$ mit einem Fixpunkt bei $\bar{x} = 0$. Mit welcher maximalen Konvergenzordnung konvergiert die Iteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ lokal gegen \bar{x} ?	