

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16

## Verständnisfragen – Hausübung 3

<b>VF-1:</b>	
1.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.
2.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabebefehler nicht viel größer als der Eingabebefehler.
3.	Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist gut konditioniert für alle $x$ mit $ x - 1  \ll 1$ .
4.	Die Funktion $f(x, y) = x e^{4y^2}$ ist gut konditioniert für alle $(x, y)$ mit $x^2 + y^2 \leq 0.1$ .
5.	Berechne die relative Konditionszahl der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^2$ für $(x_1, x_2) = (e, \pi)$ .

<b>VF-2:</b>	
1.	Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi 10^{-10}$ . Bei der Berechnung von $(x + y)(x - y)$ in $\mathbb{M}(10, 12, -99, 99)$ tritt Auslöschung auf.
2.	Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi 10^{-10}$ . Bei der Berechnung von $\sin(x) - \sin(y)$ in $\mathbb{M}(10, 12, -99, 99)$ tritt Auslöschung auf.
3.	Die Funktion $f(x, y) = x + y$ ist für alle $(x, y)$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$ gut konditioniert.
4.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix $A$ . Dann gilt $\kappa(A^{-1}) = \kappa(A)^{-1}$ .
5.	Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi 10^{-10}$ . Berechne $\sin(x) - \sin(y)$ in $\mathbb{M}(10, 7, -99, 99)$ .

<b>VF-3:</b> Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = b$ :	
1.	Das Problem ist immer gut konditioniert.
2.	Bei Störung der Eingabedaten $A$ und $b$ wird der relative Fehler in der Lösung in Abhängigkeit vom relativen Eingabebefehler maximal durch den Faktor $\kappa(A)$ verstärkt.
3.	Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann immer mit dem Standard-Gauß-Algorithmus (ohne Spaltenpivotisierung) berechnet werden.
4.	Zeilenäquilibration verbessert immer die Kondition der Matrix $A$ bezüglich der 2-Norm.
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -2.34 & 14.4 \\ 5.67 & 6.78 \end{pmatrix}$ und $B$ die zu $A$ gehörige zeilenäquilibrierte Matrix. Berechne $\ B\ _\infty$ .

<b>VF-4:</b> Seien $A, B$ beliebige $n \times n$ -Matrizen mit reellen Einträgen. Weiter sei $\ \cdot\ $ eine Matrixnorm. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch.	
1.	$\ A + B\  \leq \ A\  + \ B\ $ .
2.	$\ A - B\  \leq \ A\  - \ B\ $ .
3.	$\ \lambda A + \mu B\  \leq \lambda\ A\  + \mu\ B\ $ , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ .
4.	$\ AB\  \leq \ A\ \ B\ $ .

<b>VF-5:</b> Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!	
1.	$A$ ist regulär.
2.	Berechne $\ A\ _1$ .
3.	$\det(A) = 0$ .
4.	$\ A\ _\infty = 12$
5.	Für eine beliebige rechte Seite $b \in \mathbb{R}^2$ besitzt $Ax = b$ eine eindeutige Lösung $x$ .

<b>VF-6:</b> Gegeben seien die Matrizen $A$ und $\tilde{A}$ mit $\tilde{A} \approx A = \begin{pmatrix} 123 & 0.12 \\ 1.23 & 12.3 \end{pmatrix}$ . Alle Zahlen in $A$ sind auf drei signifikante Ziffer gerundet. $\Delta A$ sei die größtmögliche Abweichung für $A - \tilde{A}$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	$\ \Delta A\ _1 = 0.505$
2.	$\ \Delta A\ _\infty = 0.505$
3.	Berechne $\ A\ _1$ .
4.	Berechne $\ A\ _\infty$ .
5.	Für den relativen Fehler von $A$ gemessen in der 1-Norm gilt $r_{A1} \approx 0.004$