

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16

## Verständnisfragen – Hausübung 3

| <b>VF-1:</b> |   |          |
|--------------|---|----------|
| 1.           | Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.         | falsch   |
| 2.           | Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.               | falsch   |
| 3.           | Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist gut konditioniert für alle $x$ mit $ x - 1  \ll 1$ .                       | falsch   |
| 4.           | Die Funktion $f(x, y) = x e^{4y^2}$ ist gut konditioniert für alle $(x, y)$ mit $x^2 + y^2 \leq 0.1$ .      | wahr     |
| 5.           | Berechne die relative Konditionszahl der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^2$ für $(x_1, x_2) = (e, \pi)$ . | <b>4</b> |

| <b>VF-2:</b> |  |          |
|--------------|--|----------|
| 1.           | Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi 10^{-10}$ . Bei der Berechnung von $(x + y)(x - y)$ in $\mathbb{M}(10, 12, -99, 99)$ tritt Auslöschung auf.    | wahr     |
| 2.           | Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi 10^{-10}$ . Bei der Berechnung von $\sin(x) - \sin(y)$ in $\mathbb{M}(10, 12, -99, 99)$ tritt Auslöschung auf. | wahr     |
| 3.           | Die Funktion $f(x, y) = x + y$ ist für alle $(x, y)$ mit $(x, y) \neq (0, 0)$ gut konditioniert.   | falsch   |
| 4.           | Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix $A$ . Dann gilt $\kappa(A^{-1}) = \kappa(A)^{-1}$ .     | falsch   |
| 5.           | Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi 10^{-10}$ . Berechne $\sin(x) - \sin(y)$ in $\mathbb{M}(10, 7, -99, 99)$ .                                     | <b>0</b> |

| <b>VF-3:</b> Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$ . Dann gilt für das zugehörige lineare Gleichungssystem $Ax = b$ : Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! |   |          |
|---|---|----------|
| 1.  | Das Problem ist immer gut konditioniert.  | falsch   |
| 2.  | Bei Störung der Eingabedaten $A$ und $b$ wird der relative Fehler in der Lösung in Abhängigkeit vom relativen Eingabefehler maximal durch den Faktor $\kappa(A)$ verstärkt. | falsch   |
| 3.  | Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann immer mit dem Standard-Gauß-Algorithmus (ohne Spaltenpivotisierung) berechnet werden.  | falsch   |
| 4.  | Zeilenäquilibration verbessert immer die Kondition der Matrix $A$ bezüglich der 2-Norm.   | falsch   |
| 5.  | Es seien $A = \begin{pmatrix} -2.34 & 14.4 \\ 5.67 & 6.78 \end{pmatrix}$ und $B$ die zu $A$ gehörige zeilenäquilibrierte Matrix. Berechne $\ B\ _\infty$ .                  | <b>1</b> |

|  |  |        |
|--|--|--------|
| <b>VF-4:</b> Seien $A, B$ beliebige $n \times n$ -Matrizen mit reellen Einträgen. Weiter sei $\ \cdot\ $ eine Matrixnorm. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch. |  |        |
| 1.   | $\ A + B\  \leq \ A\  + \ B\ $ .   | wahr   |
| 2.   | $\ A - B\  \leq \ A\  - \ B\ $ .   | falsch |
| 3.   | $\ \lambda A + \mu B\  \leq \lambda \ A\  + \mu \ B\ $ , $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . | falsch |
| 4.   | $\ AB\  \leq \ A\  \ B\ $ .  | wahr   |

|  |  |           |
|--|--|-----------|
| <b>VF-5:</b> Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! |  |           |
| 1.   | $A$ ist regulär.   | wahr      |
| 2.   | Berechne $\ A\ _1$ .   | <b>20</b> |
| 3.   | $\det(A) = 0$ .  | falsch    |
| 4.   | $\ A\ _\infty = 12$  | falsch    |
| 5.   | Für eine beliebige rechte Seite $b \in \mathbb{R}^2$ besitzt $Ax = b$ eine eindeutige Lösung $x$ . | wahr      |

|  |   |               |
|--|---|---------------|
| <b>VF-6:</b> Gegeben seien die Matrizen $A$ und $\tilde{A}$ mit $\tilde{A} \approx A = \begin{pmatrix} 123 & 0.12 \\ 1.23 & 12.3 \end{pmatrix}$ . Alle Zahlen in $A$ sind auf drei signifikante Ziffer gerundet. $\Delta A$ sei das größtmögliche Abweichung für $A - \tilde{A}$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! |   |               |
| 1.   | $\ \Delta A\ _1 = 0.505$  | wahr          |
| 2.   | $\ \Delta A\ _\infty = 0.505$   | falsch        |
| 3.   | Berechne $\ A\ _1$ .  | <b>124.23</b> |
| 4.   | Berechne $\ A\ _\infty$ .   | <b>123.12</b> |
| 5.   | Für den relativen Fehler von $A$ gemessen in der 1-Norm gilt $r_{A1} \approx 0.004$ | wahr          |