Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16
Verständnisfragen – Übung 5

VF-1: Mit $A, L, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei L eine normierte linke untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ist A regulär, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$.	
2.	Ist A positiv definit und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung mit $A = LDL^T$, wobei alle Diagonalelemente von D positiv sind.	
3.	Nur für positiv definite Matrizen A kann man mit dem Cholesky-Algorithmus eine Zerlegung $A = LDL^T$ finden.	
4.	Ist A regulär und symmetrisch, so existiert stets eine LDL^T–Zerlegung, so dass $A = LDL^T$ gilt.	
5.	Ist A symmetrisch positiv definit, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x, b \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$. Weiter sei $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre, obere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv–definite Matrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
2.	Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
3.	Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops	
4.	Die Skalierung von A benötigt $\mathcal{O}(n^2)$ Ops	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Abkürzung “SPD” stehe für symmetrisch und positiv–definit. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	A SPD $\Longrightarrow$ A ist invertierbar	
2.	A SPD $\Longleftrightarrow$ A^{-1} SPD	
3.	A SPD $\Longrightarrow$ A hat nur positive Eigenwerte	
4.	A symmetrisch mit $A > .0$ (komponentenweise) $\Longrightarrow$ A ist SPD	
5.	Zur Lösung eines Gleichungssystems mit einer SPD–Matrix kann man bei der Gauß–Elimination auf die Spaltenpivotisierung verzichten.	
6.	A ist eine SPD–Matrix genau dann, wenn A eine Cholesky–Zerlegung besitzt, und alle Diagonalelemente des Cholesky–Faktors L ($A = L\,L^T$) positiv sind.	

VF-4: Es seien $\|.\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|.\|$ die zugehörige Matrix–Norm. Weiter seien A, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\|A^k\| \leq \|A\|^k$	
2.	Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$	
3.	Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\inf_{\|x\|=1} \|A\,x\|}$	
4.	$\forall x \in \mathbb{R}^n \;:\; \|A\,x\| = \|A\|\,\|x\|$	
5.	$\|A\,B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$	

VF-5: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine allgemeine, reguläre Matrix und $x, b \in \mathbb{R}^n$ mit $A\,x = b$. Weiter seien $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre obere Dreiecksmatrix, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische, positiv–definite Matrix. (Bei den Angaben zur Zahl der benötigten Operationen (kurz "Ops") verwenden wir die Zählung wie in der Vorlesung bzw. im Buch). Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Lösung von $R\,x = b$ benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops.	
2.	Die Lösung von $L\,x = b$ benötigt $\frac{n^2}{2} + \mathcal{O}(n)$ Ops.	
3.	Die Lösung von $A\,x = b$ per Gaußelimination benötigt $\frac{n^3}{3} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops.	
4.	Die Lösung von $S\,x = b$ per Choleskyzerlegung benötigt $\frac{n^3}{6} + \mathcal{O}(n^2)$ Ops.	

VF-6: Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonale (quadratische) Matrizen, d.h. $A^T A = I$ und $B^T B = I$, wobei I die Einheitsmatrix ist. Weiter bezeichne $\|.\|_2$ die Euklidische Vektor- / Matrixnorm und κ_2 die zugehörige Konditionszahl. Welche der folgenden Aussagen sind immer korrekt?		
1.	A^T ist orthogonal	
2.	$A\,A^T = I$	
3.	A ist nicht symmetrisch	
4.	A ist symmetrisch	
5.	$A\,B$ ist eine orthogonale Matrix	
6.	$A + B$ ist eine orthogonale Matrix	
7.	Die Spalten von A sind paarweise orthogonal	
8.	Die Zeilen von A sind paarweise orthogonal	
9.	Alle Zeilen und Spalten von A haben die Euklidische Länge 1	
10.	$\|A\,x\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$	
11.	$\kappa_2(A) = 1$	

VF-7: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Es sei $B := D\,A$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu A. Dann gilt $\kappa_2(B) \leq \kappa_2(A)$.	
2.	Es seien $\tilde{x}$ die Lösung des gestörten Problems $A\,\tilde{x} = \tilde{b}$ und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A bezüglich $\|\cdot\|$. Es gilt $\|\tilde{x} - x\| \leq \kappa(A)\|\tilde{b} - b\|$.	
3.	Es existiert immer eine $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A.	
4.	Es existiert immer eine $Q\,R$-Zerlegung $A = Q\,R$ von A.	