

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16

Verständnisfragen – Hausübung 6

VF-1: Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $QR = A$ eine Zerlegung von A mit Q orthogonal und R eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	$Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$
2.	$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q^{-1})\kappa_2(R)$
3.	Zur Lösung von $Ax = b$ über die QR-Zerlegung muss Q explizit bestimmt werden.
4.	$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(R)$
5.	Gib das kleinste β an, für das die Ungleichung $\ Qx\ _2 \leq \beta \ x\ _2$ allgemein gültig ist.

VF-2: Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Householder-Transformation und $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!	
1.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q = I - \frac{vv^T}{v^T v}$.
2.	Es gilt stets $Q = Q^T$.
3.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Qy = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$.
4.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$ gilt: $Qy = y$.
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Um A mit Householdertransformationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa αn^p Operationen (gemäß Vorlesung). Gib p an.

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.
2.	Das Householder-Verfahren zur Berechnung einer QR-Zerlegung von A ist ohne Pivotisierung nicht stabil.
3.	Die einzelnen Schritte des Givens-Algorithmus zur QR-Zerlegung von A lassen sich geometrisch als Drehungen interpretieren.
4.	Eine Givens-Rotation wird durch eine symmetrische Matrix beschrieben.
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Um A mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa αn^p Operationen (gemäß Vorlesung). Gib p an.
6.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Um A mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa αn^p Operationen (gemäß Vorlesung). Gib α an.