

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16

Verständnisfragen – Übung 7

VF-1: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R$ gilt. Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ der Winkel zwischen Ax^* und b .

1.	Je kleiner der Winkel Θ , desto schlechter ist das Problem konditioniert.	
2.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Qb\ _2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Die Matrix R kann man über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.	
4.	Es gilt $Ax^* - b \perp \text{Bild}(A)$.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = R$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$.

1.	Der Vektor Ax^* steht senkrecht auf b .	
2.	$\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Q^T b\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Es gilt: $x^* = R^{-1} Q b$.	
4.	Die Matrix R kann man über die Cholesky-Zerlegung der Matrix $A^T A$ bestimmen.	

VF-3: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m > n$, $\text{Rang}(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems.

1.	x^* ist Lösung von $A^T Ax^* = A^T b$.	
2.	Die Matrix $A^T A$ ist symmetrisch positiv definit.	
3.	Der Vektor $Ax^* - b$ steht senkrecht auf Ax^* .	
4.	Sei \tilde{x}^* die Lösung des linearen Ausgleichsproblems bei gestörten Daten \tilde{b} . Für die Kondition des linearen Ausgleichsproblems bezüglich Störungen in b gilt: $\frac{\ \tilde{x}^* - x^*\ _2}{\ x^*\ _2} \leq \kappa_2(A)^2 \frac{\ \tilde{b} - b\ _2}{\ b\ _2}$.	

VF-4: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit vollem Rang und $m > n$, eine QR -Zerlegung $A = QR$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Es seien $Q^T A = R := \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $Q^T b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{(m-n)}$. Sei x^* die Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems.

1.	Es gilt $\det R \neq 0$.	
2.	Das Residuum des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems ist $\ b_2\ _2$.	
3.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Q^T b\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
4.	Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist gegeben durch $x^* = R^{-1} Q^T b$.	