

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16

Verständnisfragen – Übung 8

VF-1: Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1 und maximal 2.	
2.	Falls $\ \Phi'(x^*)\ _2 < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\ x_0 - x^*\ _2$ hinreichend klein.	
3.	$\ \Phi'(x^*)\ _2 > 1$ ist hinreichend dafür, dass kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ existiert.	
4.	$\Phi(x) = 2e^{-x^2}$ hat genau einen Fixpunkt auf \mathbb{R} und das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	

VF-2: Es seien $0 < a \in \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = x/2 + a/(2x)$.		
1.	$x^* = \sqrt{a}$ ist ein Fixpunkt von Φ .	
2.	Das Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle Startwerte $x_0 > 0$ quadratisch gegen \sqrt{a} .	
3.	Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert nur, falls x_0 hinreichend nahe am Fixpunkt gewählt wird.	
4.	Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle $x_0 > \sqrt{a}$ und die Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend.	

VF-3: Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion Φ mit Norm $\ \cdot\ $ und Kontraktionskonstante $L < 1$ erfüllt.		
1.	Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ konvergiert die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gegen einen Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ .	
2.	Es existiert genau ein $x^* \in D$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.	
3.	Für Startwerte $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunktiteration für Φ höchstens mit Konvergenzordnung 1.	
4.	Die Funktion Φ ist auf D stetig differenzierbar.	

VF-4: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 2 \cos(\frac{x}{3})$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.		
1.	Es existiert genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.	
2.	Die Fixpunktiteration konvergiert für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.	
3.	Für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\ x_3 - x^*\ \leq \frac{8}{9} \ x_1 - x_0\ $ für einen Fixpunkt x^* von Φ .	
4.	Es gilt $\ x_3 - x_2\ \leq \frac{4}{9} \ x_1 - x_0\ $ für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.	