Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16
Verständnisfragen – Hausübung 11

VF-1: Es seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $x^\star \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen nichtlinearen Ausgleichsproblems $\|F(x)\|_2 \to \min$ sowie $\phi(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$. Weiterhin nehmen wir an, dass $x^\star$ in einer Umgebung U eindeutig ist und $F'(x)$ in U vollen Rang hat. Dann gilt: (Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!)		
1.	$\phi(x^\star) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)$.	
2.	Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems kann als Fixpunktiteration geschrieben werden mit der Iterationsfunktion $\mathbf{\Phi}(x) := x - \big(F'(x)^T F'(x)\big)^{-1} \nabla\phi(x)$.	
3.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, dann konvergiert sie lokal quadratisch.	
4.	Lokale Maxima und Sattelpunkte sind für die Gauß-Newton-Methode abstoßend.	

VF-2: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird die Korrektur s^k durch folgende Minimierungsaufgabe festgelegt ($\mu > 0$ ein zu wählender Parameter):		
1.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2 + \mu\|s^k\|_2 = \min$	
2.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2\|s^k\|_2^2 = \min$	
3.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$	
4.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\| \mu \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$	
5.	Es seien $m = 2$, $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \\ 6\,x - 2 \end{pmatrix}$. Gib x^* an.	

VF-3: Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j\, x^j \;\middle|\; a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\{1,\, x,\, x^2, \ldots, x^n\}$ bildet eine Basis von Π_n.	
2.	$\{\alpha_0,\, \alpha_1 x,\, \alpha_2 x^2, \ldots, \alpha_n x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
3.	$\left\{1,\, x - \alpha_1,\, (x - \alpha_1)(x - \alpha_2),\, \ldots,\, \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)\right\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
4.	Der Raum Π_n hat die Dimension n.	

VF-4: Sei $P(f\|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ mit den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Seien l_{jn} die Lagrangeschen Fundamentalpoynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)\, l_{jn}(x)$, $x \in \mathbb{R}$.	
2.	$P(f\|x_0, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^n a_j\, x^j$ ist immer ein Polynom vom Grad n mit $a_n \neq 0$.	
3.	Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.	
4.	$P(f\|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$.	

VF-5: Es sei $P(f\|x_0,\dots,x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)),\dots,(x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$.		
1.	$P(\Psi\|x_0,\dots,x_n) = \Psi$ für alle Polynome Ψ.	
2.	Für beliebige f ist $P(f\|x_0,\dots,x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0,1,\dots,n$.	
3.	Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen f gilt: $P(f\|x_0,\dots,x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$.	
4.	Der Fehler $\max_{x\in[x_0,x_n]} \|P(f\|x_0,\dots,x_n)(x) - f(x)\|$ wird mit wachsendem n immer kleiner.	
5.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0,\dots,x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$.	

VF-6: Sei $P(f\|x_0,\dots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i = 0,\dots,n$ mit den Stützstellen $a = x_0 < \dots < x_n = b$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $e(x) := f(x) - P(f\|x_0,\dots,x_n)$, $x \in \mathbb{R}$ der Fehler im Intervall $I := [\min(a,x), \max(b,x)]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	$e(x_i) = 0,\ i = 0,\dots,n.$	
2.	Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi \in I$, so dass $e(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\,\frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\xi)$.	
3.	Es sei $[c,d] \subsetneq I$. Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x \in [c,d]$ wie folgt abschätzen: $\|e(x)\| \le \max_{z\in[c,d]} \|\prod_{i=0}^{n}(z - x_i)\| \max_{z\in[c,d]} \frac{\|f^{(n+1)}(z)\|}{(n+1)!}$.	
4.	Sei $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $x \in [-5,5]$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n} = -5 + 10\,j/n$, $j = 0,\dots,n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[-5,5]} \|f(x) - P(f\|x_0,\dots,x_n)\| = 0$.	
5.	Es seien $f(0) = 2,\ f(2) = 4$ und $f(3) = 5$. Berechne $P(f\|0,2,3)(1.5)$.	

VF-7: Es sei $P(f \mid x_0,\dots,x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)),\dots,(x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$, und $x, x^* \in [x_0, x_n]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	$P(f \mid x_0,\dots,x_n)$ kann man an der Stelle x^* effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	
2.	$P(f \mid x_0,\dots,x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	
3.	$P(f \mid x_0,\dots,x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f \mid x_0,\dots,x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}\left(n^2\right)$	
5.	Es seien $f(x) = \ln(x) + 2\,x^2$ und $x_0 = 0.5,\ x_1 = 1$ sowie $x_2 = 2$. Bestimme $P(f\|x_0,\,x_1,\,x_2)(1)$.	