

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16

## Verständnisfragen – Hausübung 11

<b>VF-1:</b> Es seien $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen nichtlinearen Ausgleichsproblems $\ F(x)\ _2 \rightarrow \min$ sowie $\phi(x) := \frac{1}{2}F(x)^T F(x)$ . Weiterhin nehmen wir an, dass $x^*$ in einer Umgebung $U$ eindeutig ist und $F'(x)$ in $U$ vollen Rang hat. Dann gilt: (Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!)		
1.	$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)$ .	wahr
2.	Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems kann als Fixpunktiteration geschrieben werden mit der Iterationsfunktion $\Phi(x) := x - (F'(x)^T F'(x))^{-1} \nabla \phi(x)$ .	wahr
3.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, dann konvergiert sie lokal quadratisch.	falsch
4.	Lokale Maxima und Sattelpunkte sind für die Gauß-Newton-Methode abstoßend.	wahr
<b>VF-2:</b> Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mit $m > n$ . Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F(x^*)\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird die Korrektur $s^k$ durch folgende Minimierungsaufgabe festgelegt ( $\mu > 0$ ein zu wählender Parameter):		
1.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F'(x^k)s^k + F(x^k)\ _2 + \mu\ s^k\ _2 = \min$	falsch
2.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F'(x^k)s^k + F(x^k)\ _2^2 + \mu^2\ s^k\ _2^2 = \min$	wahr
3.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\  \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\ _2 = \min$	wahr
4.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\  \mu \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\ _2 = \min$	falsch
5.	Es seien $m = 2$ , $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} (x - \frac{1}{3})^2 \\ 6x - 2 \end{pmatrix}$ . Gib $x^*$ an.	<b>0.33333</b>
<b>VF-3:</b> Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) $n$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ bildet eine Basis von $\Pi_n$ .	wahr
2.	$\{\alpha_0, \alpha_1 x, \alpha_2 x^2, \dots, \alpha_n x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\Pi_n$ .	wahr
3.	$\{1, x - \alpha_1, (x - \alpha_1)(x - \alpha_2), \dots, \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\Pi_n$ .	wahr
4.	Der Raum $\Pi_n$ hat die Dimension $n$ .	falsch
<b>VF-4:</b> Sei $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$ , $i = 0, \dots, n$ mit den Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$ für $n \in \mathbb{N}$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Seien $l_{jn}$ die Lagrangeschen Fundamentalpolynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_{jn}(x)$ , $x \in \mathbb{R}$ .	wahr
2.	$P(f x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ist immer ein Polynom vom Grad $n$ mit $a_n \neq 0$ .	falsch
3.	Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$ , $i = 0, \dots, n$ .	wahr
4.	$P(f x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ , $i = 0, \dots, n$ .	wahr

<b>VF-5:</b> Es sei $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$ .		
1.	$P(\Psi x_0, \dots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome $\Psi$ .	falsch
2.	Für beliebige $f$ ist $P(f x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$ .	wahr
3.	Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen $f$ gilt: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$ .	falsch
4.	Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]}  P(f x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) $ wird mit wachsendem $n$ immer kleiner.	falsch
5.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f   x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$ .	falsch

<b>VF-6:</b> Sei $P(f x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$ , $i = 0, \dots, n$ mit den Stützstellen $a = x_0 < \dots < x_n = b$ für $n \in \mathbb{N}$ . Sei $e(x) := f(x) - P(f x_0, \dots, x_n)$ , $x \in \mathbb{R}$ der Fehler im Intervall $I := [\min(a, x), \max(b, x)]$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	$e(x_i) = 0$ , $i = 0, \dots, n$ .	wahr
2.	Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi \in I$ , so dass $e(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ .	wahr
3.	Es sei $[c, d] \not\subseteq I$ . Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x \in [c, d]$ wie folgt abschätzen: $ e(x)  \leq \max_{z \in [c, d]}  \prod_{i=0}^n (z - x_i)  \max_{z \in [c, d]} \frac{ f^{(n+1)}(z) }{(n+1)!}$ .	falsch
4.	Sei $f(x) = 1/(1+x^2)$ , $x \in [-5, 5]$ . Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n} = -5 + 10j/n$ , $j = 0, \dots, n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [-5, 5]}  f(x) - P(f x_0, \dots, x_n)  = 0$ .	falsch
5.	Es seien $f(0) = 2$ , $f(2) = 4$ und $f(3) = 5$ . Berechne $P(f 0, 2, 3)(1.5)$ .	<b>3.5</b>

<b>VF-7:</b> Es sei $P(f   x_0, \dots, x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$ , und $x, x^* \in [x_0, x_n]$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	$P(f   x_0, \dots, x_n)$ kann man an der Stelle $x^*$ effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	wahr
2.	$P(f   x_0, \dots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	falsch
3.	$P(f   x_0, \dots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	wahr
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f   x_0, \dots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$	wahr
5.	Es seien $f(x) = \ln(x) + 2x^2$ und $x_0 = 0.5$ , $x_1 = 1$ sowie $x_2 = 2$ . Bestimme $P(f x_0, x_1, x_2)(1)$ .	<b>2</b>