Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16
Verständnisfragen – Übung 11

VF-1: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^\star)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Dazu sei noch $\phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T F(x)$. Weiterhin nehmen wir an, dass $x^\star$ in einer Umgebung U eindeutig sowie F zweimal stetig differenzierbar ist und $F'(x)$ in U vollen Rang hat. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	
2.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren auch lokale Maxima von ϕ bestimmen.	
3.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren immer die lokalen Minima von ϕ bestimmen.	
4.	Wenn $\|F(x^\star)\|_2 = 0$ ist, so hat das Gauß-Newton-Verfahren eine Konvergenzordnung $p > 1$.	

VF-2: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch, bzw. gib einen numerischen Wert mit fünf signifikanten Ziffern an!		
1.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.	
2.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.	
3.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.	
4.	Beim Gauß-Newton-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.	
5.	Sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2x-3 \\ 3y-2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestime für $(x_0, y_0) = (0,0)$ (x_1, y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib x_1 an.	

VF-3: Es seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Der Wert $[x_0, x_1, \ldots, x_n]f$ hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab.	
2.	Für die Newton-Basispolynome (Knotenpolynome) ω_j gilt: $[x_0, \ldots x_k]\omega_j = \delta_{jk}$ für $j, k = 0, \ldots, n$.	
3.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der Koeffizienten in den Newtonschen Interpolationsformeln mit dem Schema der dividierten Differenzen beträgt $\frac{1}{2}n^2$ Divisionen und n^2 Subtraktionen.	
4.	Für numerische Berechnungen ist die Darstellung des Polynomes in Potenzform (Normalform) stets geeignet.	
5.	Der Aufwand zur Auswertung des Newtonschen-Interpolationspolynoms mit dem Hornerschema beträgt etwa $\alpha\, n^p$ Operationen. Gib p an.	

VF-4: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$. Es sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt: $\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.	
2.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)^{(n)}(x) = n!\, \delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$.	
3.	$[x_0, x_1]\, f = f(x_1) - f(x_0)$.	
4.	Mit $f(x) := 2x^4$ gilt $[x_0, \ldots, x_n]\, f = 2$ für alle $n \geq 4$.	
5.	Berechne $[0, 1, 2, 3]\, (5\, x^3 + x - 5)$.	