Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16
Verständnisfragen – Hausübung 12

VF-1: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f\|x_0,\ldots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$ interpoliert.		
1.	Das Polynom $P(f\|x_0,\ldots,x_n)$ ist eindeutig.	
2.	Das Verfahren von Neville-Aitken ist eine effiziente Methode zur Bestimmung des Polynoms $P(f\|x_0,\ldots,x_n)$.	
3.	Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n, so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a,b]$.	
4.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation.	
5.	Es seien $f(x_0)=2$ und $f(x_1)=-1$. Berechne $P(f\|x_0,x_1)(\frac{x_0+x_1}{2})$.	

VF-2: Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $P(f\|x_0,\ldots,x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n, das die Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \le x_0 < \ldots < x_n \le b$ interpoliert. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0,\ldots,x_n]\,f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es gilt: $P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_n)(x) = P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_{n-1})(x) + \delta_n \Pi_{i=0}^{n-1}(x-x_i)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.	
2.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \|P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_n)(x) - f(x)\|$ ist minimal wenn man die Stützstellen x_i äquidistant wählt.	
3.	Es sei f ein Polynom vom Grad maximal n. Dann gilt: $f(x) = P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_n)(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.	
4.	Es gilt: $\delta_n = [x_n,\ldots,x_0]f$.	
5.	Es seien $x_0 < x_1 < x_2$ äquidistant sowie $f(x_0)=1$, $f(x_1)=3.5$ und $f(x_2)=6$. Berechne $P(f\|x_0,x_1)(\frac{x_0+x_1}{2})$.	

VF-3: Es sei $P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0,f(x_0)),\ldots,(x_n,f(x_n))$ mit $a=x_0<\ldots<x_n=b$. Es sei δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0,\ldots,x_n]\,f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es sei $f(x)=x^3+2x$. Dann gilt $[x_0,x_1,x_2,x_3]f=1$.	
2.	Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal wenn man bei der Polynominterpolation den Interpolationsfehler minimieren will.	
3.	Es gilt $P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_n)(x) = \delta_n x^n + P(f\,\|\,x_0,\ldots,x_{n-1})(x)$ für alle x.	
4.	Es gilt $P(f\,\|\,x_0,x_1,\ldots,x_n)(x) = P(f\,\|\,x_n,x_{n-1},\ldots,x_0)(x)$ für alle x.	
5.	Es seien $f(x)=x^2-e^x+6$, $n=2$, $x_0=0, x_1=0.5, x_2=2$. Bestimme $P(f\,\|\,x_0,x_1,x_2)(0)$.	