Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16
Verständnisfragen – Übung 12

VF-1: Es sei $\Pi_n = \left\{\sum_{j=0}^{n} a_j x^j \vert a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Ferner seien $l_{jn}(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$, $0 \leq j \leq n$ die Lagrange–Fundamentalpolynome und $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$.		
1.	Die $l_{jn}(x)$, $0 \leq j \leq n$ bilden eine Basis von Π_n.	
2.	Die Lagrange–Fundamentalpolynome zur Darstellung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ sind gerade so konstruiert, dass gilt: $l_{jn}(x_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 0, \dots, n$.	
3.	$\left\{a_0, a_1 x, a_2 x^2, \dots, a_n x^n\right\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
4.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$.	
5.	Es seien $n = 2$, $x_0 = 7, x_1 = 3, x_2 = 1$. Berechne $l_{02}(4)$.	

VF-2: Es sei $P(f\vert x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$.		
1.	$P(\Psi\vert x_0, \dots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome Ψ.	
2.	Für beliebige f ist $P(f\vert x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$.	
3.	Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen f gilt: $P(f\vert x_0, \dots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$.	
4.	Der Fehler $\max_{x\in[x_0,x_n]} \vert P(f\vert x_0, \dots, x_n)(x) - f(x)\vert$ wird mit wachsendem n immer kleiner.	
5.	Es seien $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 2$. Berechne $P(f\vert x_0, x_1)(\frac{x_0+x_1}{2})$.	

VF-3: Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n] f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es sei $f(x) = x^2 + 2$. Dann gilt $[x_0, x_1, x_2, x_3]f = 0$.	
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \dots, x_n)(x) = \delta_n(x - x_n) + P(f \mid x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ für alle x.	
3.	Der Fehler $\max_{x\in[a,b]} \vert P(f \mid x_0, \dots, x_n) - f(x)\vert$ hängt nicht von der Wahl der Stützstellen ab.	
4.	Es gilt $\max_{x\in[a,b]} \vert P(f \mid x_0, \dots, x_n) - f(x)\vert \leq \max_{x\in[a,b]} \vert P(f \mid x_0, \dots, x_{n-1}) - f(x)\vert$.	
5.	Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ sowie $f(1) = -1$, $f(2) = -2$ und $f(4) = 2$. Berechne $P(f\vert x_0, x_1, x_2)(3)$.	