

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16

Verständnisfragen – Hausübung 13

VF-1: Sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) := \int_a^b f(x) dx$ werde durch eine Newton-Cotes-Formel $I_m(f)$ zu Stützstellen $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$ approximiert.		
1.	$I_m(f) = \int_a^b P(f x_0, \dots, x_m) dx$ wobei $P(f x_0, \dots, x_m)$ das Interpolationspolynom von f zu den Stützstellen $x_0 < \dots < x_m$ ist.	wahr
2.	$I_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_m$.	wahr
3.	Falls $f \in C^{m+1}[a, b]$, dann gilt für den Fehler $ I(f) - I_m(f) \leq \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} \max_{x \in [a, b]} f^{(m+1)}(x) $.	falsch
4.	Bei Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung kann Auslöschung auftreten (instabil).	wahr
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel.	1
6.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der Trapezregel.	0
7.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der Simpson-Regel.	0.66667

VF-2: Das Integral $I(f) := \int_c^d f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $(d-c) \sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$, mit $c \leq x_0 < \dots < x_m \leq d$.		
1.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Interpolationspolynoms an f mit äquidistanten Stützstellen x_j .	wahr
2.	Bei allen Newton-Cotes-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte c_j nicht von der Funktion f ab.	wahr
3.	Die Newton-Cotes-Formeln sind stets exakt, wenn f ein Polynom vom Grade $\leq m+1$ ist.	falsch
4.	Die Gewichte c_j sind bei Newton-Cotes-Quadraturformeln immer alle positiv.	falsch
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der summierten Mittelpunktsregel für $n=2$.	0.70711
6.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der summierten Trapezregel für $n=2$.	0.5
7.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der summierten Simpson-Regel für $n=2$.	0.63807
8.	Berechne $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ exakt.	0.63662

VF-3: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch durch eine Gauß-Quadraturformel $G_m(f) = (b-a) \sum_{j=0}^m \omega_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$ approximiert werden.		
1.	Die Gewichte ω_j können für große m auch negativ werden.	falsch
2.	Es sei $m = 1$. Die Gauß-Quadratur hat dann die Gewichte $\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$.	wahr
3.	Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.	falsch
4.	$G_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{2m+1}$.	wahr
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^6 2^x$ mit Hilfe der Simpson-Regel.	97

VF-4: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b-a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$, mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$.		
1.	Die absolute Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.	wahr
2.	Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grade 4.	falsch
3.	Bei der Gauß-Quadratur hängen die Gewichte w_j von der Funktion f ab.	falsch
4.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f , wobei die Stützstellen so gewählt werden, dass der Fehler minimal wird.	falsch
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^4 e^x$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel.	29.556

VF-5: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b-a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$.		
1.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an f , wobei die Stützstellen äquidistant gewählt werden.	wahr
2.	Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(x^3) = I(x^3)$.	wahr
3.	Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Intervall $[a, b]$ ab.	falsch
4.	Seien $Q_m^{NC}(f)$ und $Q_m^G(f)$ die Newton-Cotes-Formel und die Formel der Gauss-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $Q_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $Q_m^G(f)$.	wahr
5.	Berechne eine Approximation von $\int_1^7 x^2$ mit Hilfe der Simpsonregel.	114