Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16
Verständnisfragen – Klausurmusteraufgabe SS16

VF-1: Cholesky- und $Q\,R$-Zerlegung		
1.	Es sei $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix A. Dann ist $\det(A) > 0$.	
2.	Es sei A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix. Dann existieren stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine Diagonalmatrix D, so dass $A = L\,D\,L^T$ gilt.	
3.	Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten $n \times n$-Matrix über das Cholesky-Verfahren beträgt etwa $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen (gem. Vorlesung).	
4.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung einer symmetrisch positiv definiten Matrix ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	
5.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie $\det(Q_v)$ an.	
6.	Es sei $A = QR$ eine $Q\,R$-Zerlegung einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt: $\det(A) = \det(R)$.	
7.	Für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so dass $A = QR$ gilt.	
8.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $Q^{-1} = Q$.	
9.	Für jede orthogonale Matrix Q gilt $\kappa_2(Q) = 1$, wobei $\kappa_2(Q)$ die Konditionszahl der Matrix Q bezüglich der 2-Norm ist.	
10.	Es seien $v \in \mathbb{R}^m$ mit $v \neq 0$ und $Q_v = I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}$ eine Householder-Transformation. Weiter sei $y = Q_v \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Geben Sie $\lVert y \rVert_2^2$ an.	