Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16
Verständnisfragen – Klausurmusteraufgabe SS16

VF-1: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m \geq n$ und vollem Rang sowie $Q\,R = A$ eine QR-Zerlegung von A. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^m$ und $x^\star \in \mathbb{R}^n$ mit $\|A\,x^\star - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.

1.	Für $m = n$ gilt $\kappa_\infty(A) = \kappa_\infty(R)$.	
2.	Das Produkt dreier orthogonaler Matrizen ist eine orthogonale Matrix.	
3.	Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|Q\,v\|_2$ definiert eine Norm.	
4.	Für $m = n$ ist A genau dann regulär, wenn R regulär ist.	
5.	Es seien $Q = \begin{pmatrix} \cos(2) & -\sin(2) \\ \sin(2) & \cos(2) \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Berechne $\kappa_2(A)$.	
6.	Das obige lineare Ausgleichsproblem ist eindeutig lösbar.	
7.	Es seien A und b so, dass $\frac{\|A\,x^\star\|_2}{\|x^\star\|_2} \approx 0$ ist. Dann ist das lineare Ausgleichsproblem gut konditioniert.	
8.	Für $m > n$ ist $A\,A^T$ regulär.	
9.	Die zum linearen Ausgleichsproblem gehörige Normalengleichung kann mittels Cholesky-Zerlegung gelöst werden.	
10.	Bestimme $(A\,x^\star)^T\ (A\,x^\star - b)$.	