Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16
Verständnisfragen – Klausurmusteraufgabe SS16

VF-1: In dieser Aufgabe betrachten wir die mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es sei $\overline{x} \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ so, dass $\overline{x}$ ein Fixpunkt von Φ und eine einfache Nullstelle von f ist. Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch; bzw. geben Sie einen numerischen Wert mit mindestens fünf signifikanten Ziffern ein!

1.	Es gelte $\lvert\Phi'(\overline{x})\rvert < 1$. Dann konvergiert die Fixpunktiteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ gegen $\overline{x}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.	
2.	$\overline{x}$ ist eindeutig.	
3.	Das Newton-Verfahren zu f konvergiert quadratisch für alle Startwerte x_0 aus einer kleinen Umgebung von $\overline{x}$.	
4.	Die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes seien erfüllt für Φ. Dann ist Φ Lipschitz-stetig.	
5.	Sei $f(x) := x^2 - 5$ und $x_0 = 5$. Geben Sie die zweite Iterierte des Newton-Verfahrens an.	
6.	Das Newton-Verfahren zu Φ kann gegen $\overline{x}$ konvergieren.	
7.	Das Bisektionsverfahren lässt sich, anders als das Newton-Verfahren, sehr einfach auf mehrdimensionale Problem erweitern.	
8.	Für das Bisektionsverfahren gilt die einfache a-priori Abschätzung $\lvert x_{k+1} - \overline{x}\rvert \leq 2^{-k}\lvert x_0 - x_1\rvert$.	
9.	Es sei nun zusätzlich $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, und es gelte $\lvert\Phi'(x)\rvert < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist das Newton-Verfahren zu f global konvergent.	
10.	Sei $\Phi(x) := x - \tan(x)$ mit einem Fixpunkt bei $\overline{x} = 0$. Mit welcher maximalen Konvergenzordnung konvergiert die Iteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ lokal gegen $\overline{x}$?	