Numerische Mathematik I für Ingenieure SS16
Verständnisfragen – Klausurmusteraufgabe SS16

VF-1: In dieser Aufgabe betrachten wir die mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es sei $\overline{x} \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ so, dass $\overline{x}$ ein Fixpunkt von Φ und eine einfache Nullstelle von f ist. Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch; bzw. geben Sie einen numerischen Wert mit mindestens fünf signifikanten Ziffern ein!

1.	Es gelte $\lvert\Phi'(\overline{x})\rvert < 1$. Dann konvergiert die Fixpunktiteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ gegen $\overline{x}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.	falsch
2.	$\overline{x}$ ist eindeutig.	falsch
3.	Das Newton-Verfahren zu f konvergiert quadratisch für alle Startwerte x_0 aus einer kleinen Umgebung von $\overline{x}$.	wahr
4.	Die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes seien erfüllt für Φ. Dann ist Φ Lipschitz-stetig.	wahr
5.	Sei $f(x) := x^2 - 5$ und $x_0 = 5$. Geben Sie die zweite Iterierte des Newton-Verfahrens an.	**2.3333**
6.	Das Newton-Verfahren zu Φ kann gegen $\overline{x}$ konvergieren.	falsch
7.	Das Bisektionsverfahren lässt sich, anders als das Newton-Verfahren, sehr einfach auf mehrdimensionale Problem erweitern.	falsch
8.	Für das Bisektionsverfahren gilt die einfache a-priori Abschätzung $\lvert x_{k+1} - \overline{x}\rvert \leq 2^{-k}\lvert x_0 - x_1\rvert$.	wahr
9.	Es sei nun zusätzlich $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, und es gelte $\lvert\Phi'(x)\rvert < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist das Newton-Verfahren zu f global konvergent.	wahr
10.	Sei $\Phi(x) := x - \tan(x)$ mit einem Fixpunkt bei $\overline{x} = 0$. Mit welcher maximalen Konvergenzordnung konvergiert die Iteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ lokal gegen $\overline{x}$?	**3**

1), 2) Φ kann mehrere Fixpunkte haben, unter denen zudem auch abstoßende seien können.
3) Stimmt, da $\overline{x}$ eine einfache Nullstelle von f ist. Für Verfahren mit Konvergenzordnung $p > 1$ kann man die Konvergenz durch genügend gute Startwerte *erzwingen*.
4) Lipschitz-stetig mit $L < 1$.
5) Nachrechnen!: $x_1 = 5 - 20/10 = 3$ und $x_2 = 3 - 4/6 = 7/3 = 2.3333$.
6) Nullstelle und Fixpunkt ist etwas **ganz Anderes**. Nur falls $\overline{x} = 0$ ist (hier ausgeschlossen), ist das *zufällig* möglich.
7) Bisektion, Seklantenverfahren und Regula Falsi nur skalar. Fixpunktverfahren, Newton- und vereinfachtes Newton-Verfahren auch mehrdimensional.
8) Unabhängig von der Funktion wird das Intervall in jedem Schritt halbiert.
9) Sei x_0 beliebig, $r := \lvert x_0 - \overline{x}\rvert$ und damit $B_r(\overline{x})$ (abgeschlossene Kugel um $\overline{x}$ mit Radius r) gegeben. Auf dieser Kugel kann man Banach sofort nachweisen: Kontraktion klar, Selbstabbildung für $x \in B_r(\overline{x})$: $\lvert\overline{x} - \Phi(x)\rvert = \lvert\Phi(\overline{x}) - \Phi(x)\rvert \leq \lvert\overline{x} - x\rvert = r$ wegen Mittelwertsatz, d.h. $\Phi(x) \in B_r(\overline{x})$.
10) $x - \tan(x) = -x^3/3 + O(x^5)$ oder Φ dreimal ableiten und $\overline{x} = 0$ einsetzen.