Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17
Verständnisfragen – Hausübung 2

VF-1: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	In $\mathbb{M}(10,3,-8,8)$ gilt $\left\lvert\frac{\text{fl}(x)-x}{x}\right\rvert = (1+\varepsilon)x$ mit $\lvert\varepsilon\rvert \le 10^{-3}$ $\forall x \in \mathbb{D}$.	
2.	In $\mathbb{M}(10,4,-8,8)$ gilt $\text{eps} = 5 \cdot 10^{-4}$.	
3.	In $\mathbb{M}(10,3,-8,8)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 10^{-8}$.	
4.	In $\mathbb{M}(10,4,-8,8)$ gilt $x_{\text{MAX}} = 99990000$.	
5.	Gib x_{MAX} für $\mathbb{M}(3,3,-4,4)$ als nicht normalisierte Dezimalzahl an.	

VF-2: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Alle Zahlenangaben sind im 10er-System. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	In $\mathbb{M}(7,3,-10,10)$ gilt $\left\lvert\frac{\text{fl}(x)-x}{x}\right\rvert \le \frac{1}{98}$ $\forall x \in \mathbb{D}$.	
2.	In $\mathbb{M}(100,4,-8,8)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 10^{-10}$.	
3.	In $\mathbb{M}(5,8,-2,9)$ gilt $x_{\text{MIN}} = 0.008$.	
4.	In $\mathbb{M}(3,2,-4,3)$ gilt $x_{\text{MAX}} = 18$.	
5.	Gib x_{MAX} für $\mathbb{M}(5,2,-3,3)$ als nicht normalisierte Dezimalzahl an.	
6.	Gib die Dezimalzahl 5.8 nicht normalisiert in $\mathbb{M}(3,6,-9,9)$ an.	

VF-3: Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b,m,r,R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\text{MAX}}, -x_{\text{MIN}}] \cup [x_{\text{MIN}}, x_{\text{MAX}}]$. Ferner beschreibe $\text{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b,m,r,R)$ die Standardrundung. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\lvert\text{fl}(x) - x\rvert \le \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
2.	$\left\lvert\frac{\text{fl}(x)-x}{x}\right\rvert \le \text{eps}$ für alle $x \in \mathbb{D}$.	
3.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ε mit $\lvert\varepsilon\rvert \le \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = (1+\varepsilon)x$.	
4.	Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ε mit $\lvert\varepsilon\rvert \le \text{eps}$ und $\text{fl}(x) = x + \varepsilon$.	
5.	Es sei $f(x) = \frac{1}{1+x}$ und $\tilde{x}$ ein Näherungswert für $x = 3$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\tilde{x})$ als Annäherung für $f(x)$.	

VF-4:

1.	Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = y\,e^{x^2}$. Für $x = 1$ und $y \neq 0$ hat die relative Konditionszahl den Wert $\kappa_{rel} = 2$.	
2.	Die Funktion $f(x,y) = x - y$ ist für alle (x,y) mit $(x,y) \neq (0,0)$ gut konditioniert.	
3.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	
4.	Nur für gut konditionierte Probleme gibt es stabile Algorithmen zur Lösung des Problems.	
5.	Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = y\,e^{x^2}$. Gib die relative Konditionszahl κ_{rel} für $x = 3$ und $y = 7$ an.	
6.	Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = x\,y^2\,z^3$. Gib die relative Konditionszahl κ_{rel} für $(x,y,z) = (e, \pi, \sqrt{3})$ an.	