

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17

Verständnisfragen – Hausübung 6

VF-1: Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $QR = A$ eine Zerlegung von A mit Q orthogonal und R eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^n$ und $x \in \mathbb{R}^n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$	
2.	$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q^{-1})\kappa_2(R)$	
3.	Zur Lösung von $Ax = b$ über die QR-Zerlegung muss Q explizit bestimmt werden.	
4.	$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(R)$	
5.	Gib das kleinste β an, für das die Ungleichung $\ Qx\ _2 \leq \beta \ x\ _2$ allgemein gültig ist.	

VF-2: Es sei $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Householder-Transformation und $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Q = I - \frac{vv^T}{v^T v}$.	
2.	Es gilt stets $Q = Q^T$.	
3.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass $Qy = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$.	
4.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$ gilt: $Qy = y$.	
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Um A mit Householdertransformationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa αn^p Operationen (gemäß Vorlesung). Gib p an.	

VF-3: Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	
2.	Das Householder-Verfahren zur Berechnung einer QR-Zerlegung von A ist ohne Pivotisierung nicht stabil.	
3.	Die einzelnen Schritte des Givens-Algorithmus zur QR-Zerlegung von A lassen sich geometrisch als Drehungen interpretieren.	
4.	Eine Givens-Rotation wird durch eine symmetrische Matrix beschrieben.	
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Um A mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa αn^p Operationen (gemäß Vorlesung). Gib p an.	
6.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Um A mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix R zu überführen benötigt man etwa αn^p Operationen (gemäß Vorlesung). Gib α an.	

VF-4: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\text{Rang}(A) = n \leq m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $QA = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$ gilt. Weiter sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$.

1.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \min \Leftrightarrow A^T(Ax - b) = 0$.	
2.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Q^T b\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Es sei $Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$, $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$. Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$.	
4.	Die Matrix R kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	
5.	Es sei $QA = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ die QR-Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme $ r $.	