Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17
Verständnisfragen – Übung 7

VF-1: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\operatorname{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^\star$ und b.

1.	Je kleiner der Winkel Θ, desto schlechter ist das Problem konditioniert.	
2.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Die Matrix R kann man über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.	
4.	Es gilt $A\,x^\star - b \perp \operatorname{Bild}(A)$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimme Θ.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\operatorname{Rang}(A) = n \le m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Weiter sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$.

1.	Der Vektor $A\,x^\star$ steht senkrecht auf b.	
2.	$\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q^T\,b\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Es gilt: $x^* = R^{-1}\,Q\,b$.	
4.	Die Matrix R kann man über die Cholesky-Zerlegung der Matrix $A^T\,A$ bestimmen.	
5.	Es seien $m = 3$, $n = 1$ und $Qb = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Bestimme $\|Ax^* - b\|_2$.	

VF-3: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $m > n$, $Rang(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems. Weiter sei $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^\star$ und b.		
1.	x^* ist Lösung von $A^TAx^* = A^Tb$.	
2.	Die Matrix A^TA ist symmetrisch positiv definit.	
3.	D er Vektor $Ax^* - b$ steht senkrecht auf Ax^*.	
4.	Sei $\tilde{x}^*$ die Lösung des linearen Ausgleichsproblems bei gestörten Daten $\tilde{b}$. Für die Kondition des linearen Ausgleichsproblems bezüglich Störungen in b gilt: $\frac{\|\tilde{x}^*-x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \kappa_2(A)^2 \frac{\left\|\tilde{b}-b\right\|_2}{\|b\|_2}$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$. Berechne $\cos(\Theta)$.	

VF-4: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit vollem Rang und $m > n$, eine $Q\,R$-Zerlegung $A = QR$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Es seien $Q^TA = R := \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $Q^Tb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{(m-n)}$. Sei x^* die Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichproblems.		
1.	Es gilt $\det R \neq 0$.	
2.	Das Residuum des zugehörigen linearen Ausgleichproblems ist $\|b_1\|_2$.	
3.	Es gilt $\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Q^Tb\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.	
4.	Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist gegeben durch $x^* = R^{-1}Q^Tb$.	
5.	Es seien $Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$. Berechne $\kappa_2(A)$.	