

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17

Verständnisfragen – Hausübung 8

VF-1: Mit $k \in \mathbb{N}$ und den Iterationswerten $x_k \in \mathbb{R}$ gelte $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p > 1$ gegen x^* , wenn $c > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $ x_{k+1} - x^* \leq c x_k - x^* ^p$ für alle $k \geq k_0$ gilt.	
2.	Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p = 1$ gegen x^* , wenn $c > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $ x_{k+1} - x^* \leq c x_k - x^* $ für alle $k \geq k_0$ gilt.	
3.	Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung $p > 1$, wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für $k \rightarrow \infty$) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor p vergrößert.	
4.	Je größer die Konvergenzordnung p ist, desto kleiner ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x^*$.	
5.	Es seien nun zusätzlich $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion Φ und $\Phi'(x^*) = 0$. Dann ist die Konvergenzordnung mindestens p . Gib p an.	

VF-2: Mit der stetig differenzierbaren Funktion $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ und den Iterationswerten $x^k \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, betrachten wir die Iterationsvorschrift $x^{k+1} := \Phi(x^k)$. Ferner sei E eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^n , $x^0 \in E$ und $L \in [0, 1)$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Ist Φ selbstabbildend und kontraktiv in E , so ist $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$ äquivalent zu $\Phi(x^*) = x^* \in E$, egal ob E konvex ist oder nicht.	
2.	Ist die Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^n$ konvex, mit $\Phi(E) \subset E$ sowie $\ \Phi'(x)\ \leq L \forall x \in E$ in einer beliebigen Operatornorm, so konvergiert die Folge $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in E$.	
3.	Ist E konvex, so ist in einer beliebigen Operatornorm $\ \Phi'(x)\ \leq L \forall x \in E$ hinreichend für die Kontraktivität von Φ in E .	
4.	Φ ist kontraktiv in E , wenn in einer beliebigen Norm gilt $\ \Phi(x) - \Phi(y)\ \leq L\ x - y\ \forall x, y \in E$.	

VF-3: Es sei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $|\Phi'(x^*)| < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $ x_0 - x^* $ hinreichend klein ist.	
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein.	
3.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1.	
4.	Für $\Phi(x) = 5 \arctan(x) + 8$ konvergiert das Fixpunktverfahren für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von Φ in \mathbb{R} .	
5.	Es sei wieder $\Phi(x) = 5 \arctan(x) + 8$. Gib für das Intervall $[-8, 200]$ die bestmögliche Kontraktionszahl L an.	

VF-4: Es seien $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.	
1.	Falls $ \Phi'(x^*) < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $ x_0 - x^* $ hinreichend klein.
2.	Falls $ \Phi'(x^*) > 1$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.
3.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1.
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $ x_0 - x^* $ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.

VF-5: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \neq -1$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.	
1.	Die Aufgabe $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung.
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt.
3.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$ erfüllt.
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > 0$.
5.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > \frac{1}{2}$ mit der Konvergenzordnung p . Gib p an..

VF-6: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 0.1 + \frac{1}{2} \sin(x)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.	
1.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 0]$ erfüllt.
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt.
3.	Das Problem $x = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, hat eine eindeutige Lösung.
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.
5.	Berechne x_2 zu $x_0 = 0$.