Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17
Verständnisfragen – Übung 8

VF-1: Es sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1 und maximal 2.	
2.	Falls $\|\Phi'(x^*)\|_2 < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte mit $\|x_0 - x^*\|_2$ hinreichend klein.	
3.	$\|\Phi'(x^*)\|_2 > 1$ ist hinreichend dafür, dass kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$ existiert.	
4.	$\Phi(x) = 2\,e^{-x^2}$ hat genau einen Fixpunkt auf $\mathbb{R}$ und das Fixpunktverfahren $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$.	

VF-2: Es seien $0 < a \in \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = x/2 + a/(2\,x)$.		
1.	$x^\star = \sqrt{a}$ ist ein Fixpunkt von Φ.	
2.	Das Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle Startwerte $x_0 > 0$ quadratisch gegen $\sqrt{a}$.	
3.	Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert nur, falls x_0 hinreichend nahe am Fixpunkt gewählt wird.	
4.	Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle $x_0 > \sqrt{a}$ und die Folge $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend.	

VF-3: Es seien die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes auf der Teilmenge $D \subset \mathbb{R}^2$ für die Funktion Φ mit Norm $\|\cdot\|$ und Kontraktionskonstante $L < 1$ erfüllt.		
1.	Für alle $x_0 \in \mathbb{R}^2$ konvergiert die Folge $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_{k+1} := \Phi(x_k)$ gegen einen Fixpunkt $x^* \in D$ von Φ.	
2.	Es existiert genau ein $x^* \in D$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.	
3.	Für Startwerte $x_0 \in D$ konvergiert die Fixpunktiteration für Φ höchstens mit Konvergenzordnung 1.	
4.	Die Funktion Φ ist auf D stetig differenzierbar.	

VF-4: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 2\cos(\frac{x}{3})$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Es existiert genau ein $x^* \in \mathbb{R}$ mit $x^* = \Phi(x^*)$.	
2.	Die Fixpunktiteration konvergiert für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.	
3.	Für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt $\|x_3 - x^*\| \leq \frac{8}{9}\|x_1 - x_0\|$ für einen Fixpunkt x^* von Φ.	
4.	Es gilt $\|x_3 - x_2\| \leq \frac{4}{9}\|x_1 - x_0\|$ für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}$.	
5.	Gib für das Interval $[-2, 2]$ die bestmögliche Kontraktionszahl L an.	