Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17
Verständnisfragen – Hausübung 9

VF-1: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = \dfrac{1}{1+x}$, mit $x \neq -1$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 \neq -1$, wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.		
1.	Die Aufgabe $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung in $[0, \infty)$.	
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt.	
3.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in diesem Fall 2.	
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige Startwerte $x_0 > -1$.	
5.	Berechnen Sie x_2 mit $x_0 = 1$.	

VF-2: Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{x^2} - 4$.		
1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^*.	
2.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = -1$, $b_0 = 1$, konvergiert gegen eine Nullstelle x^*.	
3.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = 0$, $b_0 = 2$, konvergiert gegen eine Nullstelle x^*.	
4.	Das Newton-Verfahren, angewandt auf f, konvergiert für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ gegen eine Nullstelle x^*.	
5.	Zur Lösung des Nullstellenproblems von f wird Newton-Verfahren angewandt mit dem Startwert $x_0 = 1$. Geben Sie x_1 an.	

VF-3: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* eine Lösung des Nullstellenproblems $f(x) = 0$.		
1.	Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung f' (Jacobi-Matrix) nicht.	
2.	Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so konvergiert das Newton-Verfahren für alle Startwerte die hinreichend nahe bei x^* liegen, und die Konvergenzordnung ist 2.	
3.	Das Sekantenverfahren erlaubt nur die Dimension $n = 1$.	
4.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren gewährleistet für jeden Startwert die Konvergenz des Verfahrens.	
5.	Es seien $f(x) = x^4$, $x_0 = 1$ und $\{x_k, k = 0, 1, ...\}$ die durch das Newton-Verfahren induzierte Folge. Bestimmen Sie x_2.	

VF-4: Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann existiert in [a, b] genau eine Nullstelle von f.	
2.	Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann gilt zu dem Startwert $x_0 = a$ für alle Iterationswerte x_i des Newton-Verfahrens $x_i \geq a$.	
3.	Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ sowie $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = b$ eine monoton fallende Folge.	
4.	Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann konvergiert die Bisektion stets schneller als das Sekantenverfahren, da sie den Einschluss der Nullstelle garantiert.	

VF-5: Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.		
1.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$, ist die lokale Konvergenzordnung der Fixpunktiteration mindestens 2.	
2.	Falls die Fixpunktiteration konvergiert, so gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.	
3.	Das Newton-Verfahren zur Bestimmung einer Nullstelle eines Gleichungssystems $f(x) = 0$ kann man als Fixpunktiteration darstellen.	
4.	Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{4}x$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[0, 1]$ erfüllt.	
5.	Es seien $n = 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. Bestimmen Sie $\Phi'(x^*)$.	
6.	Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(M) \neq 0$, und $\Phi(x) := x - Mf(x)$. Das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ hat dieselbe Lösungen wie das das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$.	
7.	Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Sei x_0 so gewählt, dass die Newton Methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert. Es gilt: $x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k$ für k hinreichend groß.	
8.	Die Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion konvergiert nur dann, wenn die Startwerte x_0, x_1 dieser Methode so gewählt werden, dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.	
9.	Es sei $f(x) = x^2 - 2$. Das auf f angewandte Newton Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.	
10.	Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^*, und es gelte $f(x^*) = 0$, $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$. Geben Sie die lokale Konvergenzordnung an, mit der die Newton Methode für diesen Fall mindestens konvergiert.	