Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17
Verständnisfragen – Hausübung 10

VF-1: In dieser Aufgabe betrachten wir die mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Es sei $\overline{x} \in \mathbb{R}^{\neq 0}$ so, dass $\overline{x}$ ein Fixpunkt von Φ und eine einfache Nullstelle von f ist. Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch; bzw. geben Sie einen numerischen Wert mit mindestens fünf signifikanten Ziffern ein!

1.	Es gelte $\lvert\Phi'(\overline{x})\rvert < 1$. Dann konvergiert die Fixpunktiteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ gegen $\overline{x}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.	
2.	$\overline{x}$ ist eindeutig.	
3.	Das Newton-Verfahren zu f konvergiert quadratisch für alle Startwerte x_0 aus einer kleinen Umgebung von $\overline{x}$.	
4.	Die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes seien erfüllt für Φ. Dann ist Φ Lipschitz-stetig.	
5.	Sei $f(x) := x^2 - 5$ und $x_0 = 5$. Geben Sie die zweite Iterierte des Newton-Verfahrens an.	
6.	Das Newton-Verfahren zu Φ kann gegen $\overline{x}$ konvergieren.	
7.	Das Bisektionsverfahren lässt sich, anders als das Newton-Verfahren, sehr einfach auf mehrdimensionale Problem erweitern.	
8.	Für das Bisektionsverfahren gilt die einfache a-priori Abschätzung $\lvert x_{k+1} - \overline{x}\rvert \leq 2^{-k}\lvert x_0 - x_1\rvert$.	
9.	Es sei nun zusätzlich $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$, und es gelte $\lvert\Phi'(x)\rvert < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist das Newton-Verfahren zu f global konvergent.	
10.	Sei $\Phi(x) := x - \tan(x)$ mit einem Fixpunkt bei $\overline{x} = 0$. Mit welcher maximalen Konvergenzordnung konvergiert die Iteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ lokal gegen $\overline{x}$?	

VF-2: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Wir nehmen an, dass $\operatorname{Rang}(F'(x)) = n$ für alle x. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Die Gauß-Newton Methode ist immer lokal quadratisch konvergent.	
2.	Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen quadratisch.	
3.	Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen nicht schneller als linear.	
4.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Minimums.	
5.	Sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2\,x\,y - 3 \\ 3\,y - 2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\|F(x,y)\|_2 \to \min$. Bestime für $(x_0, y_0) = (0,0)$ (x_1, y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib x_1 an.	

VF-3: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ hinreichend oft differenzierbar mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Sei $\phi(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\phi(x^*) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.	
2.	$\phi(x^*) = \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x)$.	
3.	$\nabla\phi(x^*) = 0$.	
4.	Die Aufgabe $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x)$ ist einfacher zu lösen als die Aufgabe $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$.	

VF-4: Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Wir nehmen an, dass $\operatorname{Rang} F'(x) = n$ für alle x. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ein Gauß-Newton-Verfahren kann mit einer Dämpfungsstrategie kombiniert werden.	
2.	Lokale Maxima oder Sattelpunkte der Funktion $x \mapsto \|F(x)\|_2^2$ sind für das Gauß-Newton-Verfahren immer abstoßend.	
3.	Lokale Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahren in einer Umgebung eines (lokalen) Minimums x^* ist gesichert, falls $\|F(x^*)\|_2$ hinreichend klein ist und alle Komponenten von $F''(x)$ beschränkt sind.	
4.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, ist die Konvergenzordnung der Methode im Allgemeinen genau 1.	