

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17

## Verständnisfragen – Hausübung 10

**VF-1:** In dieser Aufgabe betrachten wir die mindestens zweimal stetig differenzierbaren Funktionen  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Es sei  $\bar{x} \in \mathbb{R}^{\neq 0}$  so, dass  $\bar{x}$  ein Fixpunkt von  $\Phi$  und eine einfache Nullstelle von  $f$  ist. Beantworten Sie alle Fragen mit wahr oder falsch; bzw. geben Sie einen numerischen Wert mit mindestens fünf signifikanten Ziffern ein!

1.	Es gelte $ \Phi'(\bar{x})  < 1$ . Dann konvergiert die Fixpunktiteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ gegen $\bar{x}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ .	falsch
2.	$\bar{x}$ ist eindeutig.	falsch
3.	Das Newton-Verfahren zu $f$ konvergiert quadratisch für alle Startwerte $x_0$ aus einer kleinen Umgebung von $\bar{x}$ .	wahr
4.	Die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes seien erfüllt für $\Phi$ . Dann ist $\Phi$ Lipschitzstetig.	wahr
5.	Sei $f(x) := x^2 - 5$ und $x_0 = 5$ . Geben Sie die zweite Iterierte des Newton-Verfahrens an.	<b>2.3333</b>
6.	Das Newton-Verfahren zu $\Phi$ kann gegen $\bar{x}$ konvergieren.	falsch
7.	Das Bisektionsverfahren lässt sich, anders als das Newton-Verfahren, sehr einfach auf mehrdimensionale Probleme erweitern.	falsch
8.	Für das Bisektionsverfahren gilt die einfache a-priori Abschätzung $ x_{k+1} - \bar{x}  \leq 2^{-k} x_0 - x_1 $ .	wahr
9.	Es sei nun zusätzlich $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ , und es gelte $ \Phi'(x)  < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ . Dann ist das Newton-Verfahren zu $f$ global konvergent.	wahr
10.	Sei $\Phi(x) := x - \tan(x)$ mit einem Fixpunkt bei $\bar{x} = 0$ . Mit welcher maximalen Konvergenzordnung konvergiert die Iteration $x_{i+1} = \Phi(x_i)$ lokal gegen $\bar{x}$ ?	<b>3</b>

**VF-2:** Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mit  $m > n$ . Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$ . Wir nehmen an, dass  $\text{Rang}(F'(x)) = n$  für alle  $x$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Gauß-Newton Methode ist immer lokal quadratisch konvergent.	falsch
2.	Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen quadratisch.	falsch
3.	Falls die Gauß-Newton Methode konvergiert, ist die Konvergenz im allgemeinen nicht schneller als linear.	wahr
4.	Die Gauß-Newton Methode ist immer konvergent in einer hinreichend kleinen Umgebung eines Minimums.	falsch
5.	Sei nun $F(x, y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2xy-3 \\ 3y-2 \end{pmatrix}$ . Wir betrachten $\ F(x, y)\ _2 \rightarrow \min$ . Bestimme für $(x_0, y_0) = (0, 0)$ $(x_1, y_1)$ mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib $x_1$ an.	<b>0.5</b>

<b>VF-3:</b> Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ hinreichend oft differenzierbar mit $m > n$ und $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F(x^*)\ _2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ . Sei $\phi(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ .	falsch
2.	$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)$ .	wahr
3.	$\nabla \phi(x^*) = 0$ .	wahr
4.	Die Aufgabe $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)$ ist einfacher zu lösen als die Aufgabe $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ .	falsch

<b>VF-4:</b> Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ . Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \ F(x)\ _2$ . Wir nehmen an, dass $\text{Rang } F'(x) = n$ für alle $x$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Ein Gauß-Newton-Verfahren kann mit einer Dämpfungsstrategie kombiniert werden.	wahr
2.	Lokale Maxima oder Sattelpunkte der Funktion $x \mapsto \ F(x)\ _2^2$ sind für das Gauß-Newton-Verfahren immer abstoßend.	wahr
3.	Lokale Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahren in einer Umgebung eines (lokalen) Minimums $x^*$ ist gesichert, falls $\ F(x^*)\ _2$ hinreichend klein ist und alle Komponenten von $F''(x)$ beschränkt sind.	wahr
4.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, ist die Konvergenzordnung der Methode im Allgemeinen genau 1.	wahr