Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17
Verständnisfragen – Übung 10

VF-1: Es sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = -\frac{5}{4} - \frac{3}{4}\,x + 3\,x^2 - x^3$.		
1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^* in $(-\infty, 0]$.	
2.	Sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von $x^* < 0$, und x_k, $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge. Es gilt $\lvert x_k - x^*\rvert \approx (x_k - x_{k+1})^2$ für k hinreichend groß.	
3.	Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \leq 0$ gegen eine Nullstelle.	
4.	Mit welcher maximalen Konvergenzordnung konvergiert das Newton-Verfahren für den Startwert $x_0 = 3$?	
5.	Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 \in [0.5, 1.5]$ gegen die eindeutige Nullstelle in $x_0 \in [0.5, 1.5]$.	
6.	Mit welcher Konvergenzordnung konvergiert das Newton-Verfahren mindestens für den Startwert $x_0 = 0.5$?	

VF-2: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^\star \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\lVert F(x^\star)\rVert_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \lVert F(x)\rVert_2$. Dazu sei noch $\phi(x) = 1/2 \cdot F(x)^T\, F(x)$. Weiterhin nehmen wir an, dass $x^\star$ in einer Umgebung U eindeutig sowie F zweimal stetig differenzierbar ist und $F'(x)$ in U vollen Rang hat. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist eine Fixpunktiteration.	
2.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren auch lokale Maxima von ϕ bestimmen.	
3.	Mit genügend guten Startwerten kann man mit dem Gauß-Newton-Verfahren immer die lokalen Minima von ϕ bestimmen.	
4.	Wenn $\lVert F(x^\star)\rVert_2 = 0$ ist, so hat das Gauß-Newton-Verfahren eine Konvergenzordnung $p > 1$.	
5.	Sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2\,x\,y - 3 \\ 3\,y - 2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\lVert F(x,y)\rVert_2 \to \min$. Bestime für $(x_0, y_0) = (0,0)$ (x_1, y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib y_1 an.	

VF-3: Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \lVert F(x)\rVert_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch, bzw. gib einen numerischen Wert mit fünf signifikanten Ziffern an!		
1.	Das Gauß-Newton-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.	
2.	Das Levenberg-Marquardt-Verfahren ist lokal quadratisch konvergent.	
3.	Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.	
4.	Beim Gauß-Newton-Verfahren hat das linearisierte Ausgleichsproblem in jedem Iterationsschritt stets eine eindeutige Lösung.	
5.	Sei nun $F(x,y) = \begin{pmatrix} (x-1)^2 \\ 2\,x - 3 \\ 3\,y - 2 \end{pmatrix}$. Wir betrachten $\lVert F(x,y)\rVert_2 \to \min$. Bestime für $(x_0, y_0) = (0,0)$ (x_1, y_1) mit dem Gauß-Newton-Verfahren und gib x_1 an.	