

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17

## Verständnisfragen – Hausübung 11

**VF-1:** Es seien  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m > n$  und  $x^* \in \mathbb{R}^n$  eine Lösung des zugehörigen nichtlinearen Ausgleichsproblems  $\|F(x)\|_2 \rightarrow \min$  sowie  $\phi(x) := \frac{1}{2}F(x)^T F(x)$ . Weiterhin nehmen wir an, dass  $x^*$  in einer Umgebung  $U$  eindeutig ist und  $F'(x)$  in  $U$  vollen Rang hat. Dann gilt: (Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!)

1.	$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x)$ .	
2.	Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems kann als Fixpunktiteration geschrieben werden mit der Iterationsfunktion $\Phi(x) := x - (F'(x)^T F'(x))^{-1} \nabla \phi(x)$ .	
3.	Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, dann konvergiert sie lokal quadratisch.	
4.	Lokale Maxima und Sattelpunkte sind für die Gauß-Newton-Methode abstoßend.	
5.	Es seien $m = 2$ und $n = 1$ sowie $F(x) = \begin{pmatrix} 2x - 1 \\ 6x - 4 \end{pmatrix}$ . Gib $\ F(x^*)\ _2^2$ an.	

**VF-2:** Es sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , mit  $m > n$ . Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme  $x^* \in \mathbb{R}^n$  so, dass  $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird die Korrektur  $s^k$  durch folgende Minimierungsaufgabe festgelegt ( $\mu > 0$  ein zu wählender Parameter):

1.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F'(x^k)s^k + F(x^k)\ _2 + \mu\ s^k\ _2 = \min$	
2.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\ F'(x^k)s^k + F(x^k)\ _2^2 + \mu^2\ s^k\ _2^2 = \min$	
3.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\  \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\ _2 = \min$	
4.	Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\  \mu \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\ _2 = \min$	
5.	Es seien $m = 2$ , $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} (x - \frac{1}{3})^2 \\ 6x - 2 \end{pmatrix}$ . Gib $x^*$ an.	

**VF-3:** Es sei  $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j x^j \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$  der Raum der Polynome vom Grade (höchstens)  $n$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ bildet eine Basis von $\Pi_n$ .	
2.	$\{\alpha_0, \alpha_1 x, \alpha_2 x^2, \dots, \alpha_n x^n\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\Pi_n$ .	
3.	$\{1, x - \alpha_1, (x - \alpha_1)(x - \alpha_2), \dots, \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\Pi_n$ .	
4.	Der Raum $\Pi_n$ hat die Dimension $n$ .	
5.	$\Pi_7$ hat die Dimension $k$ . Gib $k$ an.	

**VF-4:** Sei  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten  $f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  mit den Stützstellen  $x_0 < \dots < x_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Seien $l_{jn}$ die Lagrangeschen Fundamentalpolynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_{jn}(x)$ , $x \in \mathbb{R}$ .											
2.	$P(f x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ ist immer ein Polynom vom Grad $n$ mit $a_n \neq 0$ .											
3.	Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$ , $i = 0, \dots, n$ .											
4.	$P(f x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ , $i = 0, \dots, n$ .											
5.	Gegeben sei die Wertetabelle <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="padding-right: 10px;"><math>\frac{x_i}{f_i}</math></td><td style="padding-right: 10px;">0</td><td style="padding-right: 10px;">1</td><td style="padding-right: 10px;">2</td><td style="padding-right: 10px;">3</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>-1</td><td>5</td><td>27</td></tr></table> einer Funktion $f$ . Berechne $P(f x_0, x_1, x_2, x_3)(2)$ .	$\frac{x_i}{f_i}$	0	1	2	3		1	-1	5	27	
$\frac{x_i}{f_i}$	0	1	2	3								
	1	-1	5	27								

**VF-5:** Es sei  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$  mit  $x_0 < \dots < x_n$ .

1.	$P(\Psi x_0, \dots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome $\Psi$ .											
2.	Für beliebige $f$ ist $P(f x_0, \dots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \dots, n$ .											
3.	Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen $f$ gilt: $P(f x_0, \dots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$ .											
4.	Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]}  P(f x_0, \dots, x_n)(x) - f(x) $ wird mit wachsendem $n$ immer kleiner.											
5.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f x_0, \dots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$ .											
6.	Gegeben sei die Wertetabelle <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td style="padding-right: 10px;"><math>\frac{x_i}{f_i}</math></td><td style="padding-right: 10px;">0</td><td style="padding-right: 10px;">1</td><td style="padding-right: 10px;">2</td><td style="padding-right: 10px;">3</td></tr><tr><td></td><td>1</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td></tr></table> einer Funktion $f$ . Berechne $P(f x_0, x_1, x_2, x_3)(2.5)$ .	$\frac{x_i}{f_i}$	0	1	2	3		1	3	5	7	
$\frac{x_i}{f_i}$	0	1	2	3								
	1	3	5	7								

**VF-6:** Sei  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten  $f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  mit den Stützstellen  $a = x_0 < \dots < x_n = b$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $e(x) := f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  der Fehler im Intervall  $I := [\min(a, x), \max(b, x)]$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	$e(x_i) = 0$ , $i = 0, \dots, n$ .	
2.	Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi \in I$ , so dass $e(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ .	
3.	Es sei $[c, d] \subsetneq I$ . Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x \in [c, d]$ wie folgt abschätzen: $ e(x)  \leq \max_{z \in [c, d]}  \prod_{i=0}^n (z - x_i)  \max_{z \in [c, d]} \frac{ f^{(n+1)}(z) }{(n+1)!}$ .	
4.	Sei $f(x) = 1/(1+x^2)$ , $x \in [-5, 5]$ . Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n} = -5 + 10j/n$ , $j = 0, \dots, n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [-5, 5]}  f(x) - P(f x_0, \dots, x_n)  = 0$ .	
5.	Es seien $f(0) = 2$ , $f(2) = 4$ und $f(3) = 5$ . Berechne $P(f 0, 2, 3)(1.5)$ .	

**VF-7:** Es sei  $P(f|x_0, \dots, x_n)$  das Interpolationspolynom zu den Daten  $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$  mit  $x_0 < \dots < x_n$ , und  $x, x^* \in [x_0, x_n]$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ kann man an der Stelle $x^*$ effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten.	
2.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen.	
3.	$P(f x_0, \dots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen.	
4.	Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f x_0, \dots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^2)$ .	
5.	Es seien $f(x) = \ln(x) + 2x^2$ und $x_0 = 0.5$ , $x_1 = 1$ sowie $x_2 = 2$ . Bestimme $P(f x_0, x_1, x_2)(1)$ .	