# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17
# Verständnisfragen – Hausübung 11

| **VF-1:** Es seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $m > n$ und $x^\star \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen nichtlinearen Ausgleichsproblems $\|F(x)\|_2 \to \min$ sowie $\phi(x) := \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$. Weiterhin nehmen wir an, dass $x^\star$ in einer Umgebung $U$ eindeutig ist und $F'(x)$ in $U$ vollen Rang hat. Dann gilt: (Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!) | | |
|---|---|---|
| 1. | $\phi(x^\star) = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \phi(x)$. | wahr |
| 2. | Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems kann als Fixpunktiteration geschrieben werden mit der Iterationsfunktion $\mathbf{\Phi}(x) := x - \left(F'(x)^T F'(x)\right)^{-1} \nabla\phi(x)$. | wahr |
| 3. | Falls die Gauß-Newton-Methode konvergiert, dann konvergiert sie lokal quadratisch. | falsch |
| 4. | Lokale Maxima und Sattelpunkte sind für die Gauß-Newton-Methode abstoßend. | wahr |
| 5. | Es seien $m = 2$ und $n = 1$ sowie $F(x) = \begin{pmatrix} 2\,x - 1 \\ 6\,x - 4 \end{pmatrix}$. Gib $\|F(x^*)\|_2^2$ an. | **0.1** |

| **VF-2:** Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mit $m > n$. Wir betrachten das (nichtlineare) Ausgleichsproblem: Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! Beim Levenberg-Marquardt-Verfahren wird die Korrektur $s^k$ durch folgende Minimierungsaufgabe festgelegt ($\mu > 0$ ein zu wählender Parameter): | | |
|---|---|---|
| 1. | Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2 + \mu\|s^k\|_2 = \min$ | falsch |
| 2. | Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\|F'(x^k)s^k + F(x^k)\|_2^2 + \mu^2\|s^k\|_2^2 = \min$ | wahr |
| 3. | Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\| \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ \mu I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$ | wahr |
| 4. | Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$ so, dass $\left\| \mu \begin{pmatrix} F'(x^k) \\ I \end{pmatrix} s^k + \begin{pmatrix} F(x^k) \\ \emptyset \end{pmatrix} \right\|_2 = \min$ | falsch |
| 5. | Es seien $m = 2$, $n = 1$ und $F(x) = \begin{pmatrix} \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 \\ 6\,x - 2 \end{pmatrix}$. Gib $x^*$ an. | **0.33333** |

| **VF-3:** Es sei $\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^n a_j\, x^j \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) $n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch! | | |
|---|---|---|
| 1. | $\left\{1,\, x,\, x^2, \ldots, x^n\right\}$ bildet eine Basis von $\Pi_n$. | wahr |
| 2. | $\left\{\alpha_0,\, \alpha_1 x,\, \alpha_2 x^2, \ldots, \alpha_n x^n\right\}$ bildet für beliebige, nicht verschwindende Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\Pi_n$. | wahr |
| 3. | $\left\{1,\, x - \alpha_1,\, (x - \alpha_1)(x - \alpha_2),\, \ldots,\, \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)\right\}$ bildet für beliebige Koeffizienten $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von $\Pi_n$. | wahr |
| 4. | Der Raum $\Pi_n$ hat die Dimension $n$. | falsch |
| 5. | $\Pi_7$ hat die Dimension $k$. Gib $k$ an. | **8** |

| **VF-4:** Sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ mit den Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch! | | |
|---|---|---|
| 1. | Seien $l_{jn}$ die Lagrangeschen Fundamentalpoynome. Dann gilt für das Interpolationspolynom: $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, l_{jn}(x)$, $x \in \mathbb{R}$. | wahr |
| 2. | $P(f \mid x_0, \ldots, x_n) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j$ ist immer ein Polynom vom Grad $n$ mit $a_n \neq 0$. | falsch |
| 3. | Es existiert genau ein Polynom $p \in \Pi_n$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. | wahr |
| 4. | $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$. | wahr |
| 5. | Gegeben sei die Wertetabelle $\begin{array}{ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 1 & -1 & 5 & 27 \end{array}$ einer Funktion $f$. Berechne $P(f \mid x_0, x_1, x_2, x_3)(2)$. | **5** |

| **VF-5:** Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$. | | |
|---|---|---|
| 1. | $P(\Psi \mid x_0, \ldots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome $\Psi$. | falsch |
| 2. | Für beliebige $f$ ist $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$. | wahr |
| 3. | Für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen $f$ gilt: $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = f(x)$ für alle $x \in [x_0, x_n]$. | falsch |
| 4. | Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} \lvert P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x) \rvert$ wird mit wachsendem $n$ immer kleiner. | falsch |
| 5. | Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n)$. | falsch |
| 6. | Gegeben sei die Wertetabelle $\begin{array}{ccccc} x_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline f_i & 1 & 3 & 5 & 7 \end{array}$ einer Funktion $f$. Berechne $P(f \mid x_0, x_1, x_2, x_3)(2.5)$. | **6** |

| **VF-6:** Sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ mit den Stützstellen $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ für $n \in \mathbb{N}$. Sei $e(x) := f(x) - P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$, $x \in \mathbb{R}$ der Fehler im Intervall $I := [\min(a, x), \max(b, x)]$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! | | |
|---|---|---|
| 1. | $e(x_i) = 0$, $i = 0, \ldots, n$. | wahr |
| 2. | Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert ein $\xi \in I$, so dass $e(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i)\, \frac{1}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}(\xi)$. | wahr |
| 3. | Es sei $[c, d] \subsetneq I$. Der Interpolationsfehler lässt sich dann für alle $x \in [c, d]$ wie folgt abschätzen: $\lvert e(x) \rvert \leq \max_{z \in [c,d]} \lvert \prod_{i=0}^{n}(z - x_i) \rvert\, \max_{z \in [c,d]} \frac{\lvert f^{(n+1)}(z) \rvert}{(n+1)!}$. | falsch |
| 4. | Sei $f(x) = 1/(1 + x^2)$, $x \in [-5, 5]$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ seien die Stützstellen $x_{j,n} = -5 + 10\, j/n$, $j = 0, \ldots, n$ gegeben. Dann gilt für den Fehler: $\lim_{n \to \infty} \max_{x \in [-5,5]} \lvert f(x) - P(f \mid x_0, \ldots, x_n) \rvert = 0$. | falsch |
| 5. | Es seien $f(0) = 2,\ f(2) = 4$ und $f(3) = 5$. Berechne $P(f \mid 0, 2, 3)(1.5)$. | **3.5** |

| **VF-7:** Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, und $x, x^* \in [x_0, x_n]$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an! | | |
|---|---|---|
| 1. | $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man an der Stelle $x^*$ effizient mit dem Neville-Aitken-Schema auswerten. | wahr |
| 2. | $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ kann man effizient mit dem Neville-Aitken-Schema bestimmen. | falsch |
| 3. | $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ lässt sich sowohl mit dem Newton-Schema als auch mittels der Lagrange-Fundamentalpolynome aufstellen. | wahr |
| 4. | Sowohl die Newton-Interpolation als auch das Neville-Aitken-Schema haben zur Auswertung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x)$ einen Aufwand von $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ | wahr |
| 5. | Es seien $f(x) = \ln(x) + 2\,x^2$ und $x_0 = 0.5,\ x_1 = 1$ sowie $x_2 = 2$. Bestimme $P(f \mid x_0,\, x_1,\, x_2)(1)$. | **2** |