

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17

## Verständnisfragen – Übung 11

<b>VF-1:</b> Es seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen und $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!	
1.	Der Wert $[x_0, x_1, \dots, x_n]f$ hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab.
2.	Für die Newton-Basispolynome (Knotenpolynome) $\omega_j$ gilt: $[x_0, \dots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}$ für $j, k = 0, \dots, n$ .
3.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der Koeffizienten in den Newtonschen Interpolationsformeln mit dem Schema der dividierten Differenzen beträgt $\frac{1}{2}n^2$ Divisionen und $n^2$ Subtraktionen.
4.	Für numerische Berechnungen ist die Darstellung des Polynomes in Potenzform (Normalform) stets geeignet.
5.	Der Aufwand zur Auswertung des Newtonschen-Interpolationspolynoms mit dem Horner Schema beträgt etwa $\alpha n^p$ Operationen. Gib $p$ an.

<b>VF-2:</b> Es sei $P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \dots < x_n$ . Es sei $\delta_n$ der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung $n$ von $f$ .	
1.	Es gilt: $\delta_n = [x_0, \dots, x_n]f$ .
2.	Es gilt: $P(f \mid x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) = n! \delta_n$ für alle $x \in \mathbb{R}$ .
3.	$[x_0, x_1]f = f(x_1) - f(x_0)$ .
4.	Mit $f(x) := 2x^4$ gilt $[x_0, \dots, x_n]f = 2$ für alle $n \geq 4$ .
5.	Berechne $[0, 1, 2, 3](5x^3 + x - 5)$ .

<b>VF-3:</b> Es sei $P(f   x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$ . Weiter sei $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung $n$ von $f$ .	
1.	Es gilt $P(Q   x_0, \dots, x_n) = Q$ für alle Polynome $Q$ vom Grad maximal $n$ .
2.	Es gilt $P(f   x_0, \dots, x_n)(x) = P(f   x_{n-1}, \dots, x_0)(x) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})[x_0, \dots, x_n]f$ .
3.	Es sei $P(f   x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$ . Dann gilt $a_n = [x_0, \dots, x_n]f$ .
4.	Es gilt $\max_{x \in [a, b]}  P(f   x_0, \dots, x_n) - f(x)  \leq \max_{x \in [a, b]}  P(f   x_0, \dots, x_{n-1}) - f(x) $ .
5.	Es seien $x_0 = 1, x_1 = 2, f(x_0) = 0$ und $f(x_1) = 4$ . Berechne $P(f   x_0, x_1)(\frac{7}{4})$ .

<b>VF-4:</b> Es sei $P(f   x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \dots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \dots < x_n = b$ . Weiter sei $[x_0, \dots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung $n$ von $f$ .	
1.	Es gilt $P(f   x_0, \dots, x_n)(x) = (x - x_n)[x_0, \dots, x_n]f + P(f   x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ .
2.	Es sei $\Pi_n$ der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal $n$ . Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1, \omega_k(x) := (x - x_0) \dots (x - x_{k-1}), k = 1, \dots, n$ , bilden eine Basis des Raumes $\Pi_n$ .
3.	Die Auswertung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f   x_0, \dots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem (Auswertung) bezüglich der Koeffizienten $a_k$ oft schlecht konditioniert ist.
4.	Der Fehler $\max_{x \in [a, b]}  P(f   x_0, \dots, x_n) - f(x) $ hängt von der Wahl der Stützstellen ab.
5.	Es sei $f(x) = 3x^2 + 2$ . Bestimme $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$ .