Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17
Verständnisfragen – Übung 12

VF-1: Es sei $\Pi_n = \left\{\sum_{j=0}^{n} a_j x^j | a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}\right\}$ der Raum der Polynome vom Grade (höchstens) n. Ferner seien $l_{jn}(x) = \frac{(x-x_0)...(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})...(x-x_n)}{(x_j-x_0)...(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})...(x_j-x_n)}$, $0 \le j \le n$ die Lagrange–Fundamentalpolynome und $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$.

1.	Die $l_{jn}(x)$, $0 \le j \le n$ bilden eine Basis von Π_n.	
2.	Die Lagrange–Fundamentalpolynome zur Darstellung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ sind gerade so konstruiert, dass gilt: $l_{jn}(x_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 0, \ldots, n$.	
3.	$\left\{a_0, a_1\, x, a_2\, x^2, \ldots, a_n\, x^n\right\}$ bildet für beliebige Faktoren $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ eine Basis von Π_n.	
4.	Für ein festes $\bar{x}$ ist die Auswertung von $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(\bar{x})$ sowohl mittels Neville-Aitken-Schema, als auch mittels Berechnung einer Newton-Darstellung und anschließender Auswertung von der Ordnung $\mathcal{O}(n^p)$. Gib p an.	
5.	Es seien $n = 2$, $x_0 = 7, x_1 = 3, x_2 = 1$. Berechne $l_{02}(4)$.	

VF-2: Es sei $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$.

1.	$P(\Psi|x_0, \ldots, x_n) = \Psi$ für alle Polynome $\Psi \in \Pi_n$.	
2.	Für beliebige f ist $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i)$ für $i = 0, 1, \ldots, n$.	
3.	Es sei f eine stetige Funktion. Wenn $\forall x \in [x_0, x_n]$ gilt $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = f(x)$ dann ist f auf $[x_0, x_n]$ ein Polynom vom Grad höchstens n..	
4.	Der Fehler $\max_{x \in [x_0, x_n]} |P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) - f(x)|$ wird mit wachsendem n immer kleiner.	
5.	Es seien $f(x_0) = 1$, $f(x_1) = 2$. Berechne $P(f|x_0, x_1)(\frac{x_0+x_1}{2})$.	

VF-3: Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Es seien δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms und $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.		
1.	Es sei $f(x) = x^2 + 2$. Dann gilt $[x_0, x_1, x_2, x_3]f = 0$.	
2.	Es gilt $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \delta_n(x - x_n) \cdot \ldots \cdot (x - x_0) + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ für alle x.	
3.	Für $i = 0, 1, \ldots, n$ seien x_i und y_i mit $x_i \neq x_j$ und $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$ gegeben. Dann gilt für genügend oft stetig differenzierbare Funktionen $f : [x_0, x_1, \ldots, x_n]f = [y_0, y_1, \ldots, y_n]f$.	
4.	Für $i = 0, 1, \ldots, n$ seien x_i und y_i mit $x_i \neq x_j$ und $y_i \neq y_j$ für $i \neq j$ gegeben. Dann gilt für alle Polynome $\Psi : [x_0, x_1, \ldots, x_n]\Psi = [y_0, y_1, \ldots, y_n]\Psi$.	
5.	Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$ und $x_2 = 4$ sowie $f(1) = -1$, $f(2) = -2$ und $f(4) = 2$. Berechne $P(f \vert x_0, x_1, x_2)(3)$.	

VF-4: Es sei $f \in C[a, b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ soll numerisch durch eine Quadraturformel approximiert werden.		
1.	Die absolute Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.	
2.	Die relative Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.	
3.	Die Trapezregel beruht auf der linearen Interpolation an den Intervallenden und anschließender Integration.	
4.	Es sei f eine auf $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbare, konvexe Funktion. Dann ist der mit der Trapezregel bestimmte Näherungswert immer größer als der tatsächliche Integralwert.	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^4 e^x$ mit Hilfe der Trapezregel.	