

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS17

## Verständnisfragen – Hausübung 13

**VF-1:** Es sei  $f \in C[a, b]$ . Das Integral  $I(f) := \int_a^b f(x) dx$  werde durch eine Newton-Cotes-Formel  $I_m(f)$  zu Stützstellen  $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$  approximiert.

1.	$I_m(f) = \int_a^b P(f x_0, \dots, x_m) dx$ wobei $P(f x_0, \dots, x_m)$ das Interpolationspolynom von $f$ zu den Stützstellen $x_0 < \dots < x_m$ ist.	
2.	$I_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_m$ .	
3.	Falls $f \in C^{m+1}[a, b]$ , dann gilt für den Fehler $ I(f) - I_m(f)  \leq \frac{(b-a)^{m+1}}{(m+1)!} \max_{x \in [a, b]}  f^{(m+1)}(x) $ .	
4.	Es sei $I_m^n(f)$ die zu $I_m(f)$ gehörige summierte Regel mit $h = \frac{b-a}{n}$ . Falls $m$ gerade ist und $f \in C^{m+2}[a, b]$ , dann verhält sich der Fehler $ I(f) - I_m^n(f) $ für $n \rightarrow \infty$ wie $\mathcal{O}(h^{m+2})$ .	
5.	Bei Newton-Cotes-Formeln höherer Ordnung kann Auslöschung auftreten (instabil).	
6.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel ( $I_0$ ).	
7.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der Trapezsregel ( $I_1$ ).	
8.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der Simpson-Regel ( $I_2$ ).	

**VF-2:** Das Integral  $I(f) := \int_c^d f(x) dx$  soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel  $(d-c) \sum_{j=0}^m c_j f(x_j)$ , mit  $c \leq x_0 < \dots < x_m \leq d$ .

1.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Interpolationspolynoms an $f$ mit äquidistanten Stützstellen $x_j$ .	
2.	Bei allen Newton-Cotes-Quadraturformeln hängen die Integrationsgewichte $c_j$ nicht von der Funktion $f$ ab.	
3.	Die Newton-Cotes-Formeln sind stets exakt, wenn $f$ ein Polynom vom Grade $\leq m+1$ ist.	
4.	Die Gewichte $c_j$ sind bei Newton-Cotes-Quadraturformeln immer alle positiv.	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der summierten Mittelpunktsregel für $n=2$ ( $I_0^2$ ).	
6.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der summierten Trapezsregel für $n=2$ ( $I_1^2$ ).	
7.	Berechne eine Approximation von $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ mit Hilfe der summierten Simpson-Regel für $n=2$ ( $I_2^2$ ).	
8.	Berechne $\int_0^1 \sin(\pi x) dx$ exakt.	

<b>VF-3:</b> Es sei $f \in C[a, b]$ . Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch durch eine Gauß-Quadraturformel $G_m(f) = (b-a) \sum_{j=0}^m \omega_j f(x_j)$ , mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$ approximiert werden.		
1.	Die Gewichte $\omega_j$ können für große $m$ auch negativ werden.	
2.	Es sei $m = 1$ . Die Gauß-Quadratur hat dann die Gewichte $\omega_0 = \omega_1 = \frac{1}{2}$ .	
3.	Die Stützstellen sind äquidistant verteilt.	
4.	$G_m(q) = I(q)$ für alle $q \in \Pi_{2m+1}$ .	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^6 2^x$ mit Hilfe der Simpson-Regel.	

<b>VF-4:</b> Es sei $f \in C[a, b]$ . Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b-a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ , mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$ .		
1.	Die absolute Kondition, bezüglich der Maximumnorm, der Bestimmung von $I(f)$ ist gut.	
2.	Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(p) = I(p)$ für alle Polynome $p$ vom Grade 4.	
3.	Bei der Gauß-Quadratur hängen die Gewichte $w_j$ von der Funktion $f$ ab.	
4.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an $f$ , wobei die Stützstellen so gewählt werden, dass der Fehler minimal wird.	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_0^4 e^x$ mit Hilfe der Mittelpunktsregel.	

<b>VF-5:</b> Es sei $f \in C[a, b]$ . Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $Q_m(f) = (b-a) \sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$ .		
1.	Newton-Cotes-Formeln basieren auf der analytischen Integration eines Lagrange-Interpolationspolynoms an $f$ , wobei die Stützstellen äquidistant gewählt werden.	
2.	Sei $Q_2(f)$ die Simpsonregel. Es gilt $Q_2(x^3) = I(x^3)$ .	
3.	Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte $w_j$ von dem Intervall $[a, b]$ ab.	
4.	Seien $Q_m^{NC}(f)$ und $Q_m^G(f)$ die Newton-Cotes-Formel und die Formel der Gauss-Quadratur. Für $m \geq 1$ gilt, dass der Exaktheitsgrad von $Q_m^{NC}(f)$ strikt kleiner ist als der von $Q_m^G(f)$ .	
5.	Berechne eine Approximation von $\int_1^7 x^2$ mit Hilfe der Simpsonregel.	