Aufgabe 3 Ist eine Vereinfachung der Aufgabe 3 aus der Klausur F07 (9 Punkte)
Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

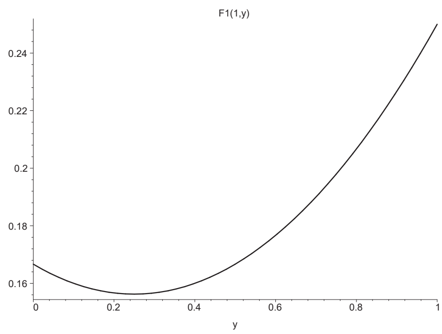
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{y}{4} + \dfrac{(x-y)^2}{6} \\ \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y).$$

a) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach für den Bereich $E := [0,1] \times [0,1]$ erfüllt sind. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

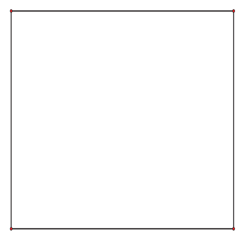
b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ zwei Iterationsschritte durch, d. h. berechnen Sie (x_2, y_2).

c) Geben Sie eine a-priori- und eine a-posteriori-Fehlerabschätzung für (x_2, y_2) an unter Verwendung der $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

d) Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0,\ 0)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon := 6 \cdot 10^{-5}$ anzunähern?



Im $\mathbb{R}^2$ gibt es Monotonie nur entlang von Linien bzw. Kurven Daraus lässt sich i.a. nicht auf ausschließliche Randextrema schließen. Zudem gibt es lokale Randextrema: Siehe $F_1(1, y)$ links.
Zum Rand gehören im $\mathbb{R}^2$ nämlich neben den Eckpunkten auch die *Verbindungskanten* (siehe rechts).



zu a)
i) E ist abgeschlossen.
ii) **Selbstabbildung:** Wegen $(x, y) \in [0,1]^2$ gilt $x - y \in [-1, 1]$ und folglich $\cos((x-y)/2) \in [\cos(1/2), 1] = [0.8775826,\ 1]$. Daraus folgt

$$0 \le F_1(x,y) = \frac{y}{4} + \frac{(x-y)^2}{6} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} = 0.416667$$
$$0 < 0.438791 = 0 + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\right) \le F_2(x,y) = \frac{x}{3} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \le \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cos(0) = \frac{5}{6} = 0.833333 < 1.$$

Insgesamt gilt also $F(E) \subset \widetilde{E} := [0, 0.416667] \times [0.438791, 0.833334] \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf $\widetilde{E} \subset E$.

iii) **Kontraktivität:** Da E konvex ist und F stetig differenzierbar ist, dürfen wir zum Nachweis die Ableitung benutzen. Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{x-y}{3} & \dfrac{1}{4} - \dfrac{x-y}{3} \\ \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right) & \dfrac{1}{4}\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Wegen $(x, y) \in E = [0,1]^2$ gilt (s.o.) $|(x-y)/2| \le 1/2$ sowie $\sin((x-y)/2) \in [-\sin(1/2),\ \sin(1/2)]$, so dass wir durch elementweise Betragsabschätzung (zulässig in der $\|\cdot\|_1$- und $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm) erhalten:

$$\|F'(x,y)\|_\infty \le \left\| \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\left\{ \frac{1}{3} + \frac{7}{12},\ \frac{7}{12} + \frac{1}{4} \right\} = \frac{11}{12} =: L < 1,$$

d. h. F ist kontraktiv auf E. Somit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

(5)

Bemerkung: In $\widetilde{E} = [0, 0.416667] \times [0.438791, 0.833334]$ gilt

$$\|F'(x,y)\|_\infty \leq \left\| \begin{pmatrix} \frac{5}{18} & \frac{19}{36} \\ 0.434512 & 0.101179 \end{pmatrix} \right\|_\infty = \frac{29}{36} = 0.712290.$$

Hier bringt die Einschränkung auf $\widetilde{E}$ also nicht sehr viel.

zu b)

Startwert: $\quad x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

1. Schritt: $\quad x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad$ und für c) $\quad x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2. Schritt: $\quad x^2 := \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \\ \frac{1}{2} \cos\left(\frac{-1}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ 0.484456 \end{pmatrix}, \qquad x^2 - x^1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \\ -0.0155438 \end{pmatrix}$

(1)

zu c) Es gilt $\|x^1 - x^0\|_\infty = 1/2$ und somit gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_\infty \leq \frac{L^2}{1-L} \|x^1 - x^0\|_\infty = \frac{\left(\frac{11}{12}\right)^2}{1 - \frac{11}{12}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{121}{24} = 5.04167 \qquad (< 5.1).$$

Es gilt $\|x^2 - x^1\|_\infty = 1/6$ und somit gemäß a-posteriori-Abschätzung

$$\|x^2 - x^*\|_\infty \leq \frac{L}{1-L} \|x^2 - x^1\|_\infty = \frac{\frac{11}{12}}{1 - \frac{11}{12}} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{6} = 1.83333 \qquad (< 1.9).$$

(2)

zu d) Es gilt gemäß a-priori-Abschätzung

$$\|x^n - x^*\|_\infty \leq \frac{L^n}{1-L} \|x^1 - x^0\|_\infty \overset{!}{\leq} \varepsilon \Longleftrightarrow$$

$$n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1 - x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln\left(\frac{6 \cdot 10^{-5} \cdot \frac{1}{12}}{\frac{1}{2}}\right)}{\ln \frac{11}{12}} = \frac{\ln 10^{-5}}{\ln \frac{11}{12}} = \frac{-5 \cdot \ln 10}{\ln 11 - \ln 12} = 132.3\ldots \quad .$$

Es sind also höchstens $n = 133$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon := 6 \cdot 10^{-5}$ zu erreichen.

(1)