# Numerische Mathematik für Maschinenbauer

## Einführung und Motivation

A. Reusken

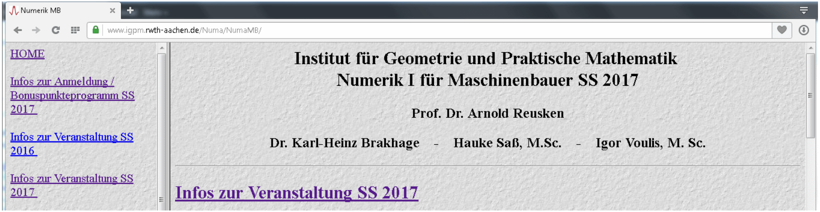
K.-H. Brakhage, I. Voulis, H. Saß

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2017

# Einstieg

Homepage: www.igpm.rwth-aachen.de/Numa/NumaMB




Folien zur Vorlesung

Hinweise zur Anmeldung SS 2017

Bonuspunkteprogramm SS 2017

Informationen zur aktuellen Veranstaltung SS 2017

# Literatur

Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler
(2. Auflage)

Wolfgang Dahmen und Arnold Reusken

Springer Verlag, ISBN 3-540-76492-2

1. Auflage: ISBN 3-540- 25544-3

# Minitests/Bonuspunkte

Bis zu sechs Punkte der Klausur (10%) kann man durch Erfüllung der folgenden Bedingungen erreichen:

1. fristgerechte Anmeldung zu den Kleingruppen
2. maximal zwei Fehltermine in der zugeteilten Gruppe

Punktvergabe bei den beiden Minitests:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Ab Prozent* | *25%* | *37.5%* | *50%* | *62.5%* | *75%* | *87.5%* |
| *Bonuspunkte* | *0.5* | *1.0* | *1.5* | *2.0* | *2.5* | *3.0* |

Anzahl der Punkte wird dann addiert und auf eine ganze Zahl gerundet.

Die Art der ***Minitests entspricht*** in etwa dem ***Verständnisfragen-Teil der Klausur.***

# Statistik

## Ergebnisse der Klausur SS 2013

| Bonuspunkte | % bestanden |
|---|---|
| $\geq$ **3** (# 90) | 100 % |
| **2** (# 130) | 90 % |
| **1** (# 250) | 85 % |
| **0** (# 450) | 65 % |

# Inhaltsangabe

1. Einleitung
2. Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität
3. Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren
4. Lineare Ausgleichsrechnung
5. Nichtlineare Gleichungssysteme, iterative Lösungsverfahren
6. Nichtlineare Ausgleichsrechnung
7. Berechnung von Eigenwerten
8. Interpolation
9. Splinefunktionen
10. Numerische Integration
11. Gewöhnliche Differentialgleichungen
12. Partielle Differentialgleichungen
13. Große dünnbesetzte lineare Gleichungssysteme
14. Numerische Simulationen: Vom Pendel bis zum Airbus

# Ziele der Vorlesung

Für unterschiedliche Problemstellungen (Lösen eines linearen Gleichungssystems, Berechnung eines Integrals, Lösen einer Differentialgleichung) werden folgende Themen behandelt:

1. **Kondition** (= Empfindlichkeit für Störungen) eines Problems
2. Wichtige numerische **Lösungsverfahren**
3. **Stabilität** (= Empfindlichkeit für Störungen) der Lösungsverfahren.
4. **Effizienz** = Anzahl der Rechenoperationen (Speicherbedarf) der Lösungsverfahren.

# Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 2.1

- Grundlagen: Normen und Taylorentwicklung
- Kondition eines Problems

Was Sie mitnehmen sollten:

- Grundbegriffe: Normen, Taylorentwicklung
- Was ist die (relative) Kondition eines Problems?
- Wie wird sie berechnet?
- Wie sind die elementaren Rechenoperationen konditioniert?

# Normierte Räume

## Definition

Sei $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf $V$, falls $\forall v \in V$ gilt:

- $\|v\| \geq 0$, und $\|v\| = 0$ nur wenn $v = 0$.
- Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\|\alpha\, v\| = |\alpha|\, \|v\|$
- Für alle $v, w \in V$ gilt die Dreiecksungleichung
$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

Wenn eine Norm auf $V$ definiert ist, nennt man $V$ oft einen linearen normierten Raum.

# Vektornormen

**Beispiel**: Sei $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Für jedes $p$ mit $1 \le p \le \infty$ definiert

$$\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm.

Speziell:

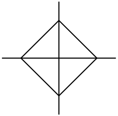
- 1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\infty$-Norm: $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$
- 2-Norm: $\|x\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (Euklidische Norm)

$\Rightarrow$ 2-Norm wird durch ein Skalarprodukt induziert.

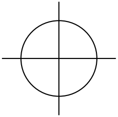
# Vektornormen

**Einheitskreise in $\mathbb{R}^2$: $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$**

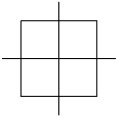
$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|$$



$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^T x}$$



$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} |x_i|$$



# Vektornormen

Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum $V$ sind alle Normen äquivalent, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_{**}$ existieren beschränkte, positive Konstanten $c$ und $C$, so dass

$$c\|v\|_* \leq \|v\|_{**} \leq C\|v\|_*, \quad \text{für alle } v \in V$$

**Beispiel**: Sei $V = \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

und

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &\leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \\ \|x\|_1 &\leq \sqrt{n}\|x\|_2 \\ \|x\|_1 &\leq n\|x\|_\infty \end{aligned}$$

# Matrixnormen

Die induzierte Matrixnorm $\|A\|$

## Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\| \cdot \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert

Beachte: Definition gilt entsprechend auch für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

# Matrixnormen

## Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\| \cdot \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert

und:

- $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$
- $\|I\| = 1$

# Matrixnormen

Aus der Definition ergeben sich folgende Formeln:

- 1-Norm: (max. Spaltensumme)

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- $\infty$-Norm: (max. Zeilensumme)

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- 2-Norm: (Spektralnorm)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

wobei $\lambda_{\max}(A^T A)$ der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.

# Matrixnormen

**Beispiel**: Für $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ ergibt sich:

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \mathbf{4}, \qquad \|\boldsymbol{A}\|_\infty = \mathbf{5}.$$

Die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A^T A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{10} \end{bmatrix}$ kann man über

$$\det(\boldsymbol{A^T A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0} \iff (\mathbf{5} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{10} - \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{25} = \mathbf{0}$$

bestimmen. Also

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \tfrac{1}{2}(15 - 5\sqrt{5}), \qquad \boldsymbol{\lambda}_2 = \tfrac{1}{2}(15 + 5\sqrt{5})$$

und damit $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(15 + 5\sqrt{5})}$.

# Landau Symbol

## Landau Symbol $\mathcal{O}$

Betrachte zwei Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir verwenden die Notation

$$g(x) = \mathcal{O}\left(h(x)\right) \qquad (x \to x_0)$$

wenn es Konstanten $C > 0$ und $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|g(x)| \leq C|h(x)|, \qquad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

gilt.

- Anschauliche Bedeutung
  $g$ wächst nicht wesentlich schneller als $h$ (in einer Umgebung von $x_0$)
- Mathematische Definition

$$0 \leq \lim_{x \to x_0} \sup \left| \frac{g(x)}{h(x)} \right| < \infty$$

# Taylorentwicklung: Skalare Funktionen

## Taylorentwicklung (von $f$ um $x$)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + f'(x)\,(\tilde{x} - x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2}(\tilde{x} - x)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}(\tilde{x} - x)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(\tilde{x} - x)^k, \end{aligned}$$

wobei $\xi$ eine Zahl zwischen $\tilde{x}$ und $x$ ist.

$f^{(n)}(x)$ ist die $n$-te Ableitung von $f$, z.B.,

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

# Taylorentwicklung: Skalare Funktionen

## Taylorpolynom vom Grad $k-1$ in $x$

$$p_{k-1}(\tilde{x}) = f(x) + f'(x)\,(\tilde{x}-x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2}(\tilde{x}-x)^2 + \ldots + \frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}(\tilde{x}-x)^{k-1}.$$

- Für $k=1$ erhält den Mittelwertsatz
$$\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x} = f'(\xi),$$
wobei $\xi$ eine Zahl zwischen $\tilde{x}$ und $x$ ist.
- Oft verwendete Darstellung
$$f(\tilde{x}) = p_{k-1}(\tilde{x}) + \mathcal{O}(|\tilde{x}-x|^k) \qquad (\tilde{x}\to x)$$

# Taylorentwicklung: Skalare Funktionen

MatlabDemo    Matlab

# Taylorentwicklung: Vektorwertige Funktionen

## Taylorentwicklung (von $f$ um $x$)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} (\tilde{x}_j - x_j) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} (\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_j - x_j) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

- Gradient: $\nabla f(x) = \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$
- Hesse-Matrix: $f''(x) = \left( \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$

# Taylorentwicklung: Vektorwertige Funktionen

## Kompakte Schreibweise

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\tilde{x} - x)^T f''(x)(\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

oder

$$f(\tilde{x}) = f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^2).$$

Falls $\|\tilde{x} - x\| \ll 1$:

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x)$$

$\doteq$ : Terme höherer Ordnung werden vernachlässigt.

# Fehlerquellen

Fehler im Resultat auf Grund von

- Datenfehlern (oder Eingabefehlern)

  $\Rightarrow$ **Kondition eines Problems**

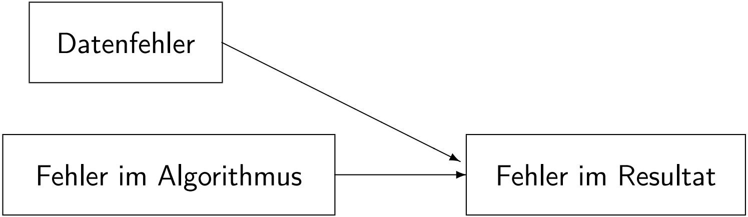
  – können häufig nicht vermieden werden

- Fehler(akkumulation) im Algorithmus (z.B. Rundungsfehler)

  $\Rightarrow$ **Stabilität eines Algorithmus**

  – kann man beeinflussen durch Anpassung des Verfahrens

## Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität



# Kondition

Ziel: Analyse der Fehlerverstärkung bei Datenfehlern

**Konzept der Kondition eines Problems**

**Beachte:** Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Wir fassen den “mathematischen Prozeß” oder das “Problem” als Aufgabe auf, eine gegebene Funktion

$$f : X \to Y$$

an einer Stelle $x \in X$ auszuwerten.

# Elementare Beispiele

- Die Berechnung der Multiplikation von $x_1$ und $x_2$:
$$f(x_1, x_2) = x_1\, x_2$$
und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.
- Die Berechnung der Summe von $x_1$ und $x_2$:
$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.
- Man bestimme die kleinere Nullstelle der Gleichung
$$y^2 - 2\, x_1\, y + x_2 = 0,$$
mit $x_1^2 > x_2$. Die Lösung $y^*$ ist
$$y^* = f(x_1, x_2) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}.$$
$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 > x_2\}$, $Y = \mathbb{R}$.

# Elementare Beispiele

- Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 = x_1\} \\ G_2 &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 = x_2\} \end{aligned}$$

wobei $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und $a_{i,j}$ gegeben seien. Mit

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

ergibt sich

$$Ay = x.$$

Annahme: $\det(A) \neq 0$, dann ist $y$ durch

$$y = A^{-1}x$$

gegeben. Also Auswertung der Funktion

$$f(x) = A^{-1}x,$$

d.h. $X = Y = \mathbb{R}^2$.

# Begriff der Kondition

## Ungestörtes Problem

$$\underbrace{x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozeß}}} \underbrace{y = f(x)}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

## Gestörtes Problem

$$\underbrace{\tilde{x} = x + \Delta x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozeß}}} \underbrace{\tilde{y} = f(\tilde{x})}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

mit Eingabefehler $\Delta x = \tilde{x} - x$

Ausgabefehler $\Delta y = \tilde{y} - y = f(\tilde{x}) - f(x)$

**Ziel**: Verhältnis Ausgabefehler $\Delta y$ zu Eingabefehler $\Delta x$.

# Begriff der Kondition

- absoluter Eingabefehler: $\|\Delta x\|_X$
- absoluter Ausgabefehler: $\|\Delta y\|_Y$
- relativer Eingabefehler: $\delta_x = \frac{\|\Delta x\|_X}{\|x\|_X}$
- relativer Ausgabefehler: $\delta_y = \frac{\|\Delta y\|_Y}{\|y\|_Y}$

## Relative Kondition

Damit bezeichnet man das Verhältnis

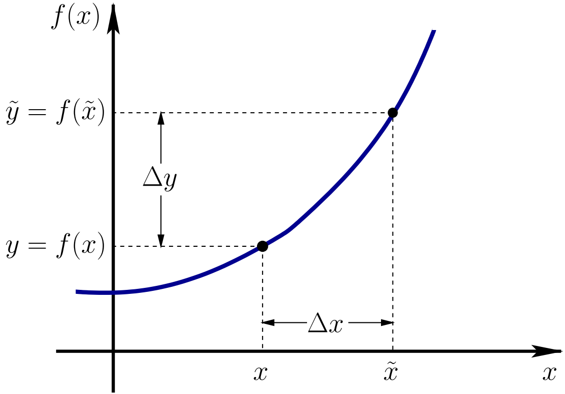
$$\frac{\delta_y}{\delta_x}$$

des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

# Begriff der Kondition

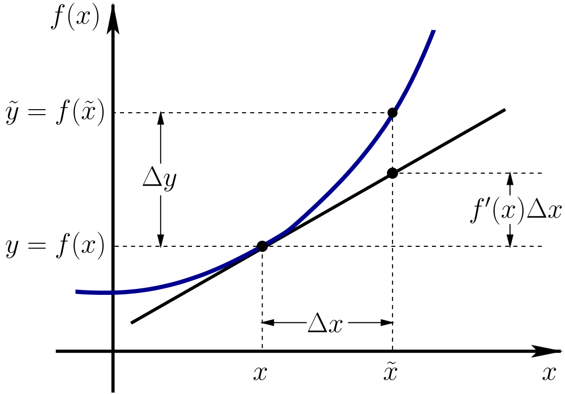
- Absolute Kondition: Verhältnis $\frac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X}$
- Mit Kondition wird meistens die relative Kondition gemeint.
- Ein Problem ist umso besser konditioniert, je kleinere Schranken für $\delta_y/\delta_x$ (mit $\delta_x \to 0$) existieren.

# Taylorentwicklung 1. Ordnung




**Kondition**: Verhältnis $\dfrac{\boldsymbol{\delta_y}}{\boldsymbol{\delta_x}}$ bzw. $\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}$.

# Taylorentwicklung 1. Ordnung




**Kondition**: Verhältnis $\dfrac{\boldsymbol{\delta_y}}{\boldsymbol{\delta_x}}$ bzw. $\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}$.

# Kondition: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Taylorentwicklung 1. Ordnung von $f$ um $x$

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + f'(x)\,(\tilde{x} - x)$$

Daraus erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Skalar, Ausgabe: Skalar)

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \doteq \kappa_{\text{rel}}(x) \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|$$

mit $\kappa_{\text{rel}}(x) := \left| f'(x) \dfrac{x}{f(x)} \right|$.

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet die Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x)$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Hieraus folgt

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \sum_{j=1}^{n} \left( \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(x)} \right) \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}.$$

Mit den Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(x)}$$

erhält man

$$\underbrace{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}_{\substack{\text{rel. Fehler} \\ \text{der Ausgabe}}} \doteq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\phi_j(x)}_{\substack{\text{Fehler-} \\ \text{verstärkung}}} \cdot \underbrace{\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}}_{\substack{\text{rel. Fehler} \\ \text{der Eingabe in } x_j}}$$

# Kondition $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Skalar)

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \dot{\leq} \kappa_{\mathrm{rel}}(x) \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j} \right|$$

mit $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \kappa_{\mathrm{rel}}^{\infty}(x) := \max_j |\phi_j(x)|$ und den Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(x)}.$$

# Beispiel 2.12

Gegeben sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{3x^2}.$$

Relative Konditionszahl:

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \right| = 6\,x^2.$$

$\rightsquigarrow$ für $|x|$ klein/groß ist $f$ gut/schlecht konditioniert.

Beispiel:

- $x = 0.1,\ \tilde{x} = 0.10001$: $\kappa_{\mathrm{rel}}(0.1) = 6 \times 10^{-2}$

$$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 6.03 \times 10^{-6}$$

- $x = 4,\ \tilde{x} = 4.0004$: $\kappa_{\mathrm{rel}}(4) = 96$

$$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 9.65 \times 10^{-3}$$

# Elementare Rechenoperationen

Kondition bei

- Multiplikation: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1\, x_2$

  $$\kappa_{\text{rel}}(x) = 1 \text{ (von } x \text{ unabhängig!)}$$

  Multiplikation für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
  Ein ähnliches Resultat gilt für die Division.

- Addition: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1 + x_2$

  $$\kappa_{\text{rel}}(x) = \max\left\{\left|\frac{x_1}{x_1+x_2}\right|, \left|\frac{x_2}{x_1+x_2}\right|\right\}$$

  Bei zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen: $\kappa_{\text{rel}} \leq 1$.

  **ABER**: $\kappa_{\text{rel}}(x) \gg 1$ wenn $x_1 \approx -x_2$.

# Beispiel 2.15 (Nullstelle)

Bestimmung der kleineren Nullstelle $y^*$ von $y^2 - 2x_1 y + x_2 = 0$:

$$x = (x_1, x_2)^T, \qquad y^* = f(x) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}$$

- Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_1^2 - x_2} - x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} = \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}}$$

- Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(x)}$$

# Beispiel 2.15 (Nullstelle)

- Verstärkungsfaktoren

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \frac{x_1}{y^*} = \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}} \frac{x_2}{y^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi_1(x)\end{aligned}$$

- Kondition: $\kappa_{\text{rel}}(x) = \max_j |\phi_j(x)|$

Kondition hängt stark von der Stelle $(x_1, x_2)$ ab:

- Wenn $x_2 < 0$: $|\phi_1(x)| \leq 1$ und $\kappa_{\text{rel}}(x) \leq 1$
- Wenn $x_2 \approx x_1^2$: $|\phi_1(x)| \gg 1$ und $\kappa_{\text{rel}}(x) \gg 1$

# Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f$ linear

Wir haben

$$y = f(x) = A^{-1}x$$

bzw. für gestörte Daten

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}) = A^{-1}\tilde{x}$$

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Vektor)

$$\frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \underbrace{\|A\| \, \|A^{-1}\|}_{\kappa(A)} \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$$

wobei

$$\kappa(A) \equiv \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

die Konditionszahl der Matrix $A$ ist.

# Beispiel 2.28

Die Bestimmung des Schnittpunkts der Geraden

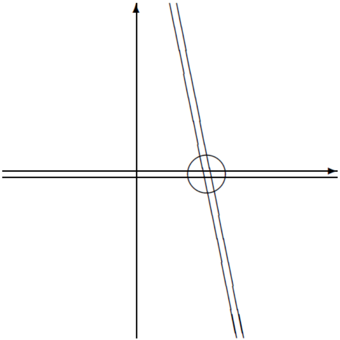
$$\begin{aligned} 3\,u_1 + 1.001\,u_2 &= 1.999 \\ 6\,u_1 + 1.997\,u_2 &= 4.003. \end{aligned}$$

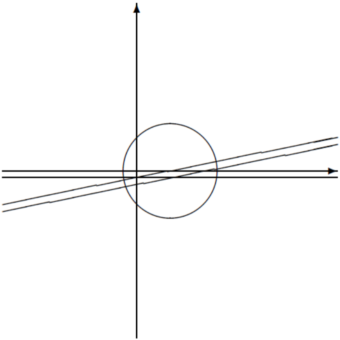
(fast parallel!) ergibt das Problem $u = A^{-1}b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix}$$

Lösung: $u = (1, -1)^T$.

# Kondition bei der Bestimmung eines Schnittpunktes





# Beispiel 2.28

Die Bestimmung des Schnittpunkts der Geraden

$$\begin{aligned} 3\,u_1 + 1.001\,u_2 &= 1.999 \\ 6\,u_1 + 1.997\,u_2 &= 4.003. \end{aligned}$$

(fast parallel!) ergibt das Problem $u = A^{-1}b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix}$$

Lösung: $u = (1, -1)^T$.

Effekt einer Störung in $b$:

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{u} = A^{-1}\tilde{b}.$$

Man erhält

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015}\begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{u} = \begin{pmatrix} 0.4004 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

# Beispiel 2.28

Wir betrachten die Maximumnorm:

$$\|x\| = \|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Es gilt

- Störung der Daten

$$\frac{\|\tilde{b} - b\|_\infty}{\|b\|_\infty} = \frac{3 \times 10^{-3}}{4.003} \approx 7.5 \times 10^{-4}$$

- Änderung des Resultats

$$\frac{\|\tilde{u} - u\|_\infty}{\|u\|_\infty} = \frac{1.8}{1} \approx 1.8$$

Schlechte Kondition wird quantifiziert durch

$$\|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty = 4798.2.$$

# Zusammenfassung

## Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Was ist die (relative) Kondition eines Problems?

- Die relative Kondition eines Problems bezeichnet das Verhältnis des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

# Zusammenfassung

Wie wird die Kondition analysiert?

- Wir haben folgende Fälle betrachtet
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f$ linear

Wie sind die elementaren Rechenoperationen konditioniert?

- Multiplikation und Division sind für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
- Addition ist
  - gut konditioniert, wenn beide Zahlen das gleiche Vorzeichen haben;
  - sehr schlecht konditioniert, wenn $x_1 \approx -x_2$.

# Verständnisfragen

- ☐ Eine gute Kondition eines Problems induziert eine geringe Fehlerfortpflanzung in einem Verfahren zur numerischen Lösung des Problems.
- ☐ Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.
- ☐ Die Funktion $f(x) = x \ln(x)$ ist schlecht konditioniert für alle $x$ mit $|x| \ll 1$.

Sei $\kappa_{rel}(x)$ die Kondition der Funktion $f(x) = x^3 \ln(x)$.
Berechnen Sie $\lim_{x \to \infty} \kappa_{rel}(x)$. ☐