Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Lineare Gleichungssysteme

A. Reusken

K.-H. Brakhage, I. Voulis, H. Saß

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2017

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 3.5

- Gauß-Elimination und LR-Zerlegung
- Cholesky-Zerlegung

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie funktioniert die LR-Zerlegung?
- Warum benötigt man Pivotisierung?
- Was ist die Cholesky-Zerlegung?

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\det A \neq 0$) und $b \in \mathbb{R}^n$, bestimme $x \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$A\,x = b.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von A, so dass das Gleichungssystem "leichter" lösbar ist.

Wichtige Verfahren:

- LR-Zerlegung: $A = L\,R$, wobei L untere Dreiecksmatrix,
  R obere Dreiecksmatrix
- Cholesky-Zerlegung: $A = L\,D\,L^T$, wobei D Diagonalmatrix
- QR-Zerlegung: $A = Q\,R$, wobei Q orthogonale Matrix

Gauß-Elimination : LR-Zerlegung

Die bekannteste Methode, das System

$$A\,x = b \qquad (\det A \neq 0)$$

auf Dreiecksgestalt zu bringen, ist die Gauß-Elimination.

$A = A^{(1)}$

$$\left[\begin{array}{ccccc} \circledast & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{c|cccc} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & \circledast & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{cc|ccc} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & \circledast & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right]$$

- Einträge der Matrix $A^{(k)}$ werden mit $a_{i,j}^{(k)}$ notiert.
- Der Eintrag $a_{j,j}^{(j)}$ ($\circledast$ oben) heißt *Pivotelement*.
- In entsprechender Weise ist auch die rechte Seite b umzuformen.

Beispiel 3.19.

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax = b}$, wobei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-8} \\ \mathbf{-16} \\ \mathbf{-12} \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Gauß-Elimiation.

Wir benutzen die folgende Notation

$$\rightarrow \; (\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-12} \end{array} \right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 1 \\ \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 2 \\ \rightarrow \\ \ell_{3,2} = \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} = \frac{-6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -41 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=3 \\ \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R \,|\, c)$$

Wegen

$$Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$$

liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(-\tfrac{9}{2}, \quad 2, -3, \quad 1\right)^T.$$

Gauß-Elimination ohne Pivotisierung

- Bestimme $(A \,|\, b) \rightarrow (R \,|\, c)$
- Löse $R\,x = c$

Beispiel 3.22.

Für die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R},$$

wobei

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{pmatrix}$$

die bei der Gauß-Elimination berechneten Dreiecksmatrizen sind.

Zusammenfassung

Ein bemerkenswertes “Nebenprodukt” der Gauß-Elimination ist also eine Faktorisierung von $\boldsymbol{A}$ in ein Produkt einer normierten unteren Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ und oberen Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$.

Satz 3.21.

Sind im Gauß-Algorithmus stets alle Pivotelemente ungleich null, dann erhält man

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R},$$

wobei $\boldsymbol{R}$ eine obere Dreiecksmatrix und $\boldsymbol{L}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix ist.

Frage:

- Was passiert, wenn das Pivotelement identisch null ist?
- Was passiert, wenn das Pivotelement “sehr klein” ist?

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Ein verschwindendes Pivotelement bedeutet **nicht**, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.
- Bei verschwindendem Pivotelement ist das Vertauschen von Zeilen notwendig.
- Selbst wenn das Pivotelement ungleich null, ist eine Vertauschung von Zeilen angebracht, um die Stabilität der Gauß-Elimination (bzw. LR-Zerlegung) zu verbessern.

Beispiel 3.23.

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Mit $l_{2,1} = 1/0.00031$ ergibt die Gauß-Elimination

$$(R\,|c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & 1 - \frac{1}{0.00031} & -7 - \frac{-3}{0.00031} \end{array}\right),$$

und bei 4-stelliger Rechnung schließlich

$$(R\,|c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & -3225 & 9670 \end{array}\right).$$

Rückwärtseinsetzen liefert dann ...

Beispiel 3.23.

$$\tilde{x}_1 \approx -6.452, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.998.$$

Exakte Rechnung ergibt sich allerdings

$$x_1 = -4.00124\ldots, \quad x_2 = -2.998759\ldots,$$

d.h., $\tilde{x}_1$ ist auf keiner Stelle korrekt.

Dieses Ergebnis ist *unakzeptabel*, weil die Kondition des Problems sehr gut ist: $\kappa_\infty(A) = 4.00$.

Nach Spaltenpivotisierung mit 4-stelliger Rechnung erhält man

$$(R\,|c) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0.9997 & -2.998 \end{array}\right)$$

und damit

$$\tilde{x}_1 \approx -4.001, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.999,$$

also völlig akzeptable Werte.

Permutationsmatrix

Sei $P_{i,j}$ die elementare Permutationsmatrix, die durch Vertauschen der i-ten und j-ten Zeile der Einheitsmatrix I entsteht.

Beispiel: für $n = 4$, $i = 2$, $j = 4$ erhält man

$$P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten die folgenden Resultate

$$\det P_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ -1 & \text{für } i \neq j, \end{cases}$$

und

$$P_{i,j}^{-1} = P_{i,j}.$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{2,3}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A\,P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Spalte}$$

$$P_{2,3}\,A\,P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der Einträge } a \text{ und } b$$

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung ist für jede nicht-singuläre Matrix durchführbar.

Satz 3.25.

Zu jeder nichtsingulären Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert eine Permutationsmatrix $\boldsymbol{P}$, eine (dazu) eindeutige untere normierte Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$, deren Einträge sämtlich betragsmäßig durch eins beschränkt sind, und eine eindeutige obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$, so dass

$$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LR}.$$

Die Matrizen $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ ergeben sich aus der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung.

Durchführung der LR-Zerlegung

Skalierung und Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Bestimme die Diagonalmatrix
$$D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n),$$
so dass $D\,A$ zeilenweise äquilibriert ist, d.h.
$$d_i = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \right)^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$
- Wende Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung auf $D\,A$ an.

Aufwand

- Zeilensummenberechnung: $n(n-1)$ Additionen;
- Berechnung der Skalierung: n Divisionen;
- Für $j = 1, 2, \ldots, n-1$
  - Berechnung der neuen Einträge in L: $(n-j)$ Divisionen;
  - Berechnung der neuen Einträge in R: $(n-j)^2$ Multiplik./Additionen

Dominierender Aufwand: $\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \sim n^3/3.$

Rechenaufwand 3.29

LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung kostet ca.

$$\frac{1}{3} n^3 \text{ Operationen.}$$

Die Skalierung (falls nötig) kostet nur $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.

Beispiel 3.30.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.30

Ergebnis: $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$, und $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Man rechnet einfach nach, dass

$$\boldsymbol{LR} = \boldsymbol{PDA}$$

gilt, wobei

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\boldsymbol{P}$ ist das Produkt von $\boldsymbol{P_{2,3}}$ und $\boldsymbol{P_{1,3}}$.

Schlußfolgerungen

Aus dem **Beipsiel 3.30.** kann man folgende Lehre ziehen:

Merke

- Skalierung/Äquilibrierung verbessert die "*Konditionszahl der Matrix*".
- Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination/ LR-Zerlegung.

Anwendungen der LR-Zerlegung

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, die schon zeilenweise äquilibriert ist. Sei für diese Matrix die LR-Zerlegung $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ bekannt.

1. Lösen eines Gleichungssystems

Die Lösung von

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ergibt sich über die Lösung zweier Dreieckssysteme

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{L}\,\underbrace{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}}_{=\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b}$$

- Bestimme $\boldsymbol{y}$ durch Vorwärtseinsetzen aus $\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b}$.
- Berechne $\boldsymbol{x}$ aus $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ durch Rückwärtseinsetzen.

Anwendungen der LR-Zerlegung

2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen $\boldsymbol{x^k}$ des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A\, x^k = b^k, \quad k = 1, \ldots, K,}$$

wobei $\boldsymbol{A}$ eine konstante Matrix ist und $\boldsymbol{b^k,\ k = 1, \ldots, K,}$ verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

Vorgehen

- Bestimme (einmalig) LR-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$, d.h.

$$\boldsymbol{P\, A = L\, R}$$

- Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen für jede rechte Seite

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L\, y^k} &= \boldsymbol{P\, b^k} \\ \boldsymbol{R\, x^k} &= \boldsymbol{y^k} \end{aligned}$$

Aufwand: $\boldsymbol{\frac{1}{3}n^3 + K n^2}$ (vs. $\boldsymbol{K\frac{1}{3}n^3}$ ohne LR-Zerlegung)

Anwendungen der LR-Zerlegung

3. Berechnung der Inversen

Sei $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ die $\boldsymbol{i}$-te Spalte der Inversen von $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{x}^1\ \boldsymbol{x}^2\ \ldots\ \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{n}}).$$

Aus $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$ folgt

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}, \quad \boldsymbol{i} = 1, \ldots, \boldsymbol{n}.$$

Zur Berechnung der Inversen bietet sich folgende Strategie an:

- Bestimme die LR-Zerlegung $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung,
- Löse die Gleichungssysteme

$$\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}}, \quad \boldsymbol{i} = 1, \ldots, \boldsymbol{n}.$$

Gesamtaufwand: etwa $\frac{4}{3}\boldsymbol{n}^3$ Operationen.

Anwendungen der LR-Zerlegung

4. Berechnung von Determinanten

Aus $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ folgt

$$\det \boldsymbol{P}\ \det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{L}\ \det \boldsymbol{R} = \det \boldsymbol{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{P} &= \det \boldsymbol{P}_{n,r_n} \ldots \det \boldsymbol{P}_{n-1,r_{n-1}} \\ &= (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}}, \end{aligned}$$

folgt

$$\det \boldsymbol{A} = (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}} \prod_{j=1}^{n} r_{j,j}.$$

Cholesky-Zerlegung

Definition 3.31.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt symmetrisch positiv definit (s.p.d.), falls

$$A^T = A \quad \text{(Symmetrie)}$$

und

$$x^T A x > 0 \quad \text{(positiv definit)}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$, gilt.

Tritt bei vielen (physikalischen) Problemen auf:

- Netzwerke mit passiven Komponenten
- Diffusions-/Wärmeleitungsgleichung
- Normalgleichung (Lineare Ausgleichsrechnung)
- ...

Beispiel 3.32

1. $A = I$ (Identität) ist s.p.d. Die Symmetrie ist trivial und
$$x^T I x = x^T x = \|x\|_2^2 > 0,$$
falls $x \neq 0$.

2. Sei $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$, und B habe vollen Rang. Dann ist $A := B^T B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ s.p.d., denn:
$$A^T = (B^T B)^T = B^T (B^T)^T = B^T B = A.$$
Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Dann gilt
$$x^T A x = x^T B^T B x = (Bx)^T (Bx) = \|Bx\|_2^2 \geq 0.$$
Es gilt $x^T A x = \|Bx\|_2^2 = 0$ nur falls $Bx = 0$ gilt. Da B vollen Rang hat, muss daher $x = 0$ sein.

Satz 3.33

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ sei s.p.d. Dann gelten folgende Aussagen:

1. $\boldsymbol{A}$ ist invertierbar, und $\boldsymbol{A}^{-1}$ ist s.p.d.
2. $\boldsymbol{A}$ hat nur strikt positive (insbesondere reelle) Eigenwerte.
3. Jede Hauptuntermatrix von $\boldsymbol{A}$ ist s.p.d.
4. Die Determinante von $\boldsymbol{A}$ ist positiv (und damit die Determinante aller Hauptuntermatrizen von $\boldsymbol{A}$)
5. $\boldsymbol{A}$ hat nur strikt positive Diagonaleinträge und der betragsgrößte Eintrag von $\boldsymbol{A}$ liegt auf der Diagonalen.
6. Bei Gauß-Elimination ohne Pivotisierung sind alle Pivotelemente strikt positiv.

Cholesky-Zerlegung

Satz 3.34

Jede s.p.d. Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ besitzt eine eindeutige Zerlegung

$$A = LDL^T,$$

wobei L eine normierte untere Dreiecksmatrix und D eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen

$$d_{i,i} > 0, i = 1, \ldots, n,$$

ist. Umgekehrt ist jede Matrix der Form LDL^T, wobei D eine Diagonalmatrix ist, die $d_{i,i} > 0$ erfüllt, und L eine normierte untere Dreiecksmatrix ist, symmetrisch positiv definit.

Beachte: Aufgrund von Satz 3.33 (5) ist bei s.p.d. Matrizen Gauß-Elimination *ohne Pivotisierung* durchführbar.

$\Rightarrow$ "Symmetrische" LR-Zerlegung

Zusammenfassung

- Die Kondition des Problems $A\,x = b$ wird im wesentlichen durch die Konditionszahl $\kappa(A)$ der Matrix A beschrieben.
- Dreiecksmatrizen ergeben leicht lösbare Systeme: Aufwand ca. $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.
- Zeilenskalierung vs. Pivotisierung
  - Skalierung/Äquilibrierung verbessert die "*Konditionszahl der Matrix*". (sogenannte Vorkonditionierung)
  - Pivotisierung verbessert die Stabilität der Gauß-Elimination/ LR-Zerlegung.
- LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung: stabile und effiziente Methode, Aufwand $\sim \frac{1}{3}n^3$
- A s.p.d. $\Leftrightarrow$ es existiert eine Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$.

Verständnisfragen

Es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$ und gesucht sei die Lösung $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

- X Es existieren stets eine Permutationsmatrix $\boldsymbol{P}$, eine normierte untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$, so dass $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LR}$ gilt.
- X Sei $\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LR}$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt: $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{R}$ oder $\det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{R}$.
- X Ohne Pivotisierung ist die Gauß-Elimination nicht für jedes $\boldsymbol{A}$ durchführbar.

Es seien $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{D}$ die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechnen Sie $\|\boldsymbol{D}\|_2$. $\boxed{0.25}$