Numerische Mathematik für Maschinenbauer

A. Reusken

K.-H. Brakhage, I. Voulis, H. Saß

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2017

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 5.1-5.4

- Lösung des linearen Ausgleichsproblems über QR-Zerlegung.

Kapitel 5:

- Einleitung: Problemstellung
- Kondition des Nullstellenproblems
- Fixpunktiteration
- Banachscher Fixpunktsatz

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie funktioniert die Fixpunktiteration
- Aussagen des Banachschen Fixpunktsatzes

Lösung des linearen Ausgleichsproblems über QR-Zerlegung

Satz 4.13.

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $\widetilde{R} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, so dass

$$Q\,A = R := \begin{pmatrix} \widetilde{R} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}m-n \end{matrix}.$$

Dann ist die Matrix $\widetilde{R}$ regulär. Schreibt man

$$Q\,b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}n \\ \}m-n \end{matrix},$$

dann ist $x^* = \widetilde{R}^{-1}\,b_1$ die Lösung des linearen Ausgleichsproblems. Die Norm $\|A\,x^* - b\|_2$ ist gerade durch $\|b_2\|_2$ gegeben.

Lösung über QR-Zerlegung

Aus Satz 4.13 ergibt sich nun folgende Methode:

- Bestimme die $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{QA} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{R}} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix} \qquad (\widetilde{\boldsymbol{R}} \in \mathbb{R}^{n \times n}),$$

  z.B. mittels Givens-Rotationen oder Householder-Spiegelungen und berechne

$$\boldsymbol{Qb} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{pmatrix}.$$

- Löse $\widetilde{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}_1$ mittels Rückwärtseinsetzen.
- Die Norm des Residuums $\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{Ax}^* - \boldsymbol{b}\|_2$ ist gerade durch $\|\boldsymbol{b}_2\|_2$ gegeben.

Beispiel 4.15.

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 12 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

d.h. $\boldsymbol{m = 3, n = 2.}$ Man bestimme die Lösung $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^2$ des zugehörigen linearen Ausgleichsproblem über QR-Zerlegung mittels Givens-Rotation.

- Annullierung von $\boldsymbol{a_{3,1}}$:

$$\boldsymbol{A}^{(2)} = \boldsymbol{G_{1,3}A} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 12 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}^{(2)} = \boldsymbol{G_{1,3}b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Zur Erinnerung: die Transformationen $\boldsymbol{G_{1,3}A}$ und $\boldsymbol{G_{1,3}b}$ werden in der Praxis ausgeführt, *ohne* dass $\boldsymbol{G_{1,3}}$ explizit berechnet wird.

Beispiel 4.15.

- Annullierung von $a_{3,2}^{(2)}$:

$$A^{(3)} = G_{2,3}A^{(2)} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 13 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(3)} = G_{2,3}\, b^{(2)} = \begin{pmatrix} 10 \\ \frac{37}{13} \\ -\frac{55}{13} \end{pmatrix}$$

Lösung von

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ \frac{37}{13} \end{pmatrix}$$

durch Rückwärtseinsetzen liefert

$$x^* = \left(\frac{301}{169}, \frac{37}{169} \right)^T.$$

Als Norm des Residiums ergibt sich:

$$\|b_2\|_2 = \frac{55}{13}.$$

Lösung über QR-Zerlegung — Stabilität

Beachte

- Wegen Satz 3.14 gilt
$$\kappa_2(A) = \kappa_2(\widetilde{R}),$$
d.h. das Quadrieren der Kondition, das bei den Normalgleichungen auftritt, wird vermieden.
- Die Berechnung der QR-Zerlegung über Givens- oder Householder-Transformationen ist ein sehr stabiles Verfahren, wobei die Fehlerverstärkung durch $\kappa_2(A)$ (und nicht $\kappa_2(A)^2$) beschrieben wird.

Beispiel 4.16

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ \delta \\ \delta \end{pmatrix}, \; 0 < \delta \ll 1.$$

Bestimmen Sie die Lösung des linearen Ausgleichsproblems über die QR-Zerlegung und diskutieren Sie das Ergebnis.

Auf einer Maschine mit $\mathbf{eps} \approx 10^{-16}$ erhält man

$$\delta = 10^{-4} : \; \frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \approx 2.2 * 10^{-16},$$

$$\delta = 10^{-6} : \; \frac{\|\tilde{x} - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \approx 1.6 * 10^{-16}.$$

Wegen der sehr guten Stabilität dieser Methode sind die Resultate viel besser als in Beispiel 4.12.

Nichtlineare Gleichungssysteme

Kapitel 5:

Nichtlineare Gleichungssysteme

Motivation

1. Die meisten Probleme in der Praxis führen auf nichtlineare Gleichungssysteme
2. Je genauer das (mathematische) Modell ist, desto eher ist es nichtlinear:
   - Pendelschwingung: Auslenkungswinkel φ beschrieben durch
     $$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\varphi(t) = 0 \quad \text{vs.} \quad \ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{\ell}\sin(\varphi(t)) = 0$$
     für kleine vs. große Auslenkungen.
   - Lineare vs. nichtlineare Diffusion: Temperatur u beschrieben durch
     $$u_t = \operatorname{div}(k\,\nabla u) \quad \text{vs.} \quad u_t = \operatorname{div}(k(u)\,\nabla u)$$
     mit Wärmeleitfähigkeit $k(u) = c_1 + c_2 u + c_3 u^3$.
   - Strömungsprobleme, Netzwerkanalyse, ...

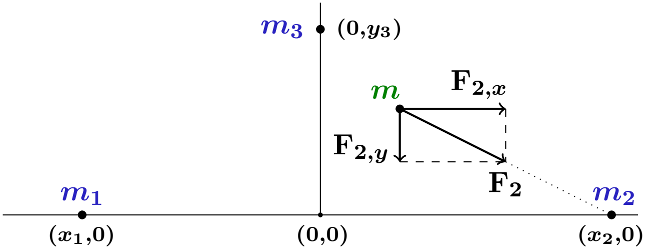
Beispiel 5.1

Für die Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen M_1 und M_2 mit gegenseitigem Abstand r gilt:

$$F = G \cdot \frac{M_1 M_2}{r^2}$$

wobei $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$Nm^2/kg.

Das Gravitationsfeld sei wie folgt:



Beispiel 5.1

Gesucht: (x, y), so dass für eine Punktmasse m an der Stelle (x, y) die Gravitationskräfte $\mathbf{F}_i$ zwischen m und m_i, $i = 1, 2, 3$, im Gleichgewicht sind.

Hilfsgrößen mit $i = 1, 2, 3$ sind

$$\begin{aligned} r_i &:= \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}, \\ F_i &:= G \cdot \frac{m_i m}{r_i^2} \\ F_{i,x} &:= \frac{F_i(x_i - x)}{r_i} \\ F_{i,y} &:= \frac{F_i(y_i - y)}{r_i} \end{aligned}$$

Beispiel 5.1

Die Gleichgewichtsbedingungen sind wie folgt:

$$F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} = 0 \quad \text{und} \quad F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 0$$

Hieraus ergibt sich das System

$$f_1(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i(x_i - x)}{\left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right)^{3/2}} = 0$$

$$f_2(x,y) = \sum_{i=1}^{3} \frac{m_i(y_i - y)}{\left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2\right)^{3/2}} = 0.$$

Beispiel 5.2

Statt der linearen Integralgleichung im Beispiel 3.3 ist nun eine nicht-lineare Integralgleichung zu lösen:

Gesucht ist eine Funktion $u(x) \geq 0$, die die Integralgleichung

$$u(x) + 2\int_0^1 \cos(xt)u(t)^3 dt = 2, \quad x \in [0,1]$$

erfüllt.

Beispiel 5.2

Das Problem wird, wie in Beispiel 3.3, auf dem Gitter

$$t_j = \left(j - \frac{1}{2}\right) h, \quad j = 1, \ldots, n, \quad h = \frac{1}{n}.$$

diskretisiert.

Man erhält dann die Gleichungen

$$u_i + 2h \sum_{j=1}^{n} \cos(t_i t_j) u_j^3 = 2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

für die Unbekannten $u_i \approx u(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$

Problemstellung

Aufgabe

Zu gegebenem $f = (f_1, \ldots, f_n)^T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bestimme ein $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)^T$, so dass

$$\begin{aligned} f_1(x_1^*, \ldots, x_n^*) &= 0 \\ \vdots \quad & \vdots \quad \vdots \\ f_n(x_1^*, \ldots, x_n^*) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Kompakte Darstellung:

$$f(x^*) = 0$$

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

- Lineare Gleichungssysteme: Sonderfall dieser Problemstellung
$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{b} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}.$$
- Der Spezialfall $n = 1$ wird oft als skalare Gleichung in *einer* Unbekannten bezeichnet.
- Hat man mehr (nichtlineare) Gleichungen als Unbekannte, d.h.
$$\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ mit } m > n$$
erhält man ein nichtlineares Ausgleichsproblem (siehe nächstes Kapitel).

Problemstellung

Aufgabe

Gegeben: $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}} \to \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$;

Gesucht: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.

Problem: analytische Lösung i.A. nicht möglich, d.h. exakte Lösung in einer endlichen Anzahl von Schritten nicht möglich.

Vorgehen: iterative Lösungsverfahren, d.h. schrittweise Annäherung an Lösung, bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?
- Unter welchen Bedingungen konvergiert das Verfahren?
- Wie schnell konvergiert das Verfahren?
- Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- Störungen in den Daten (Funktionswerten)

$$|\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

- Sei $\tilde{x}^*$ eine Nullstelle für die gestörte Funktion $\tilde{f}$, d.h.

$$\tilde{f}(\tilde{x}^*) = 0 \quad \Rightarrow \quad |f(\tilde{x}^*)| \leq \epsilon.$$

- Sei m die Vielfachheit der Nullstelle x^*, d.h.

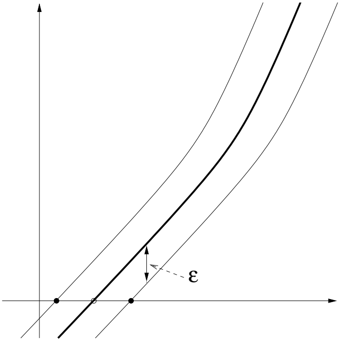
$$f(x^*) = 0,\ f'(x^*) = 0, \ldots,\ f^{(m-1)}(x^*) = 0,\ f^{(m)}(x^*) \neq 0$$

Störung im Ergebnis

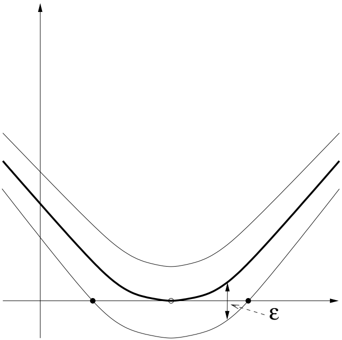
$$|\tilde{x}^* - x^*| \lesssim \epsilon^{\frac{1}{m}} \left| \frac{m!}{f^{(m)}(x^*)} \right|^{\frac{1}{m}}.$$

Merke: Probleme mit mehrfachen Nullstellen sind i.A. hinsichtlich Störungen in f sehr schlecht konditioniert.

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



einfache Nullstelle



mehrfache Nullstelle

Kondition des Nullstellenproblems: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Beispiel 5.4.

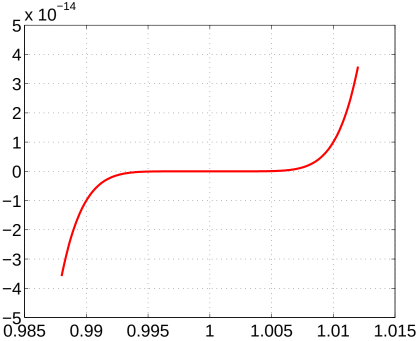
- Funktion $f(x) = (x-1)^3$ hat dreifache Nullstelle $x^* = 1$.
- Nullstelle der gestörten Funktion $\tilde{f}(x) = (x-1)^3 - \epsilon$ ist
$$\tilde{x}^* = 1 + \epsilon^{\frac{1}{3}}.$$
- Für $\epsilon = 10^{-12}$ ergibt sich
$$|f(x) - \tilde{f}(x)| = 10^{-12}, \quad |x^* - \tilde{x}^*| = 10^{-4}.$$

- Eine gestörte Funktion hat möglicherweise viele Nullstellen.

Beispiel: Polynom 7. Grades

Matlab Plot

```
x = 0.988:0.0001:1.012;
y = (x-1).^7;
plot(x,y)
```

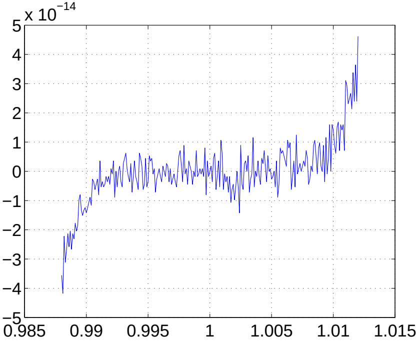


Eine mehrfache Nullstelle

Beispiel: Polynom 7. Grades

Matlab Plot

```
x = 0.988:0.0001:1.012;
y = x.^7-7*x.^6+21*x.^5-35*x.^4+35*x.^3-21*x.^2+7*x-1;
plot(x,y)
```



Viele Nullstellen

Fixpunktiteration

Fragen/Probleme:

- Wie finden wir ein geeignetes iteratives Verfahren?

Ansatz:

- Sei $M_x \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine von x abhängige Matrix, die in einer Umgebung der Nullstelle x^* invertierbar ist. Dann folgt
$$f(x^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad M_{x^*} f(x^*) = 0$$
- Erweitere die Gleichung mit x^*, d.h.
$$M_{x^*} f(x^*) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^* = x^* - M_{x^*} f(x^*)$$

Daraus folgt: Das Nullstellenproblem
$$f(x^*) = 0$$
ist äquivalent zum Fixpunktproblem
$$x^* = \Phi(x^*), \quad \text{mit} \quad \Phi(x) := x - M_x f(x).$$

Fixpunktiteration

Fixpunktiteration

- Wähle Startwert x_0 in einer Umgebung von x^*
- Bilde

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bemerkungen:

1. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Steigung von Φ an x^* entscheidet darüber, ob die Fixpunktiteration gegen x^* konvergiert/divergiert:
   - $|\Phi'(x^*)| < 1$: x^* anziehend
   - $|\Phi'(x^*)| > 1$: x^* abstoßend
2. Matlab-Demo
3. Durch eine geeignete Wahl von M_x (bzw. Φ) lässt sich die Konvergenz der Fixpunktiteration positiv beeinflussen.

Ein paar Definitionen

Lipschitz-Stetigkeit

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz stetig, wenn eine Konstante L existiert, so dass

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L \, \|x - y\|$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Kontraktion

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Abbildung $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ heißt Kontraktion auf E, wenn

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L \, \|x - y\|$$

für alle $x, y \in E$ mit $L < 1$.

- Φ ist genau dann eine Kontraktion, wenn sie Lipschitz stetig mit der Konstanten $L \in [0, 1)$ ist.

Ein paar Definitionen

Selbstabbildung

Eine Abbildung $\boldsymbol{\Phi}$ ist eine Selbstabbildung auf $\boldsymbol{E} \subset \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, wenn

$$\boldsymbol{\Phi} : \boldsymbol{E} \rightarrow \boldsymbol{E}.$$

Beispiel 5.7.

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

- Die Funktion f hat eine eindeutige positive Nullstelle x^* und es gilt $x^* \in [1, 2]$.
- Mögliche Fixpunktfunktionen sind
$$\Phi_1(x) := x^6 - 1 \quad \text{oder} \quad \Phi_2(x) := (x+1)^{\frac{1}{6}}.$$
- Betrachte Φ_1: wir erhalten
$$|\Phi_1'(x)| = |6\,x^5| > 1 \quad \text{für } x \in [1, 2],$$
d.h. Φ_1 ist nicht als Fixpunktfunktion geeignet.
- Betrachte Φ_2: wir erhalten
$$|\Phi_2'(x)| = \left|\frac{1}{6}(x+1)^{-\frac{5}{6}}\right| \leq \frac{1}{6} \quad \text{für } x \in [0, 2],$$

Beispiel 5.7.

und damit

$$\begin{aligned} |\Phi_2(x) - \Phi_2(y)| &= |\Phi_2'(\xi)(x-y)| \\ &\leq \frac{1}{6}\,|x-y| \quad \text{für } x, y \in [0,2]. \end{aligned}$$

- Die Funktion Φ_2 ist eine Selbstabbildung auf $[0,2]$, d.h. $\Phi_2 : [0,2] \to [0,2]$.
- Ergebnisse

k	$x_0 = 0.5$ $x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$	$x_0 = 1.135$ $x_{k+1} = \Phi_1(x_k)$
0	0.50000000	1.14e+00
1	1.06991319	1.14e+00
2	1.12890836	1.17e+00
3	1.13420832	1.57e+00
4	1.13467844	1.38e+01
5	1.13472009	6.91e+06
6	1.13472378	1.09e+41
7	1.13472411	1.69e+246

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E.

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

Dann gilt:

1. Es existiert genau ein Fixpunkt x^* von Φ in E.
2. Für beliebiges $x_0 \in E$ konvergiert

   $$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

   gegen den Fixpunkt x^*.

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X. Sei Φ eine Selbstabbildung auf E, d.h.

$$\Phi : E \to E,$$

und ferner eine Kontraktion auf E.

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

3. A-priori-Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\|.$$

4. A-posteriori-Fehlerabschätzung:

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_k - x_{k-1}\|.$$

Bemerkungen zum Banachschen Fixpunktsatz

Fragen/Probleme:

- Unter welchen Bedingungen konvergiert iteratives Verfahren?

$\Rightarrow$ Banachscher Fixpunktsatz liefert hinreichende Bedingungen, damit $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, \ldots$ gegen einen Fixpunkt x^* konvergiert.

Fragen/Probleme:

- Ist die gewünschte Genauigkeit erreicht?

Wir möchten eine gewünschte Genauigkeit ϵ erreichen, so dass

$$\|x_k - x^*\| \leq \epsilon.$$

Frage: Wie viele Iterationen müssen wir durchführen?

Bemerkung

Mit Hilfe der a-priori-Fehlerabschätzung erhalten wir

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\| < \epsilon.$$

und damit

$$L^k \leq \frac{\epsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}.$$

Die maximal benötigte Anzahl an Iterationen ist daher:

$$k \geq \log\left(\frac{\epsilon(1-L)}{\|x_1 - x_0\|}\right) \Big/ \log(L).$$

Beachte

Wegen

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq L^{k-1}\|x_1 - x_0\|$$

ist die Schranke in der a-posteriori-Fehlerabschätzung immer besser (d.h., kleiner) als die in der a-priori-Fehlerabschätzung.

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.10.

Sei $X = \mathbb{R}$, $E = [a, b]$ und Φ auf E stetig differenzierbar. Es gelte

$$\Phi : [a, b] \to [a, b] \qquad \text{(Selbstabbildung)},$$

und

$$\max_{x \in [a,b]} |\Phi'(x)| =: L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen aus BF-Satz erfüllt für $\| \cdot \| = | \cdot |$

Beachte: Mittelwertsatz

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)(x - y)| \leq \max_{\xi \in [a,b]} |\Phi'(\xi)| \, |x - y|,$$

d.h. Φ ist eine Kontraktion.

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.11.

Sei $X = \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, und $\Phi : E \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$\Phi : E \to E \qquad \text{(Selbstabbildung)},$$

und bzgl. einer Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ gelte für die zugehörige Matrixnorm

$$\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| = L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen aus BF-Satz erfüllt.

Hierbei ist $\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_1(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\Phi_n(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n}\Phi_n(x) \end{pmatrix}$

die Jacobi-Matrix von Φ an der Stelle x.

Zusammenfassung

- Nullstellenproblem $f(x) = 0 \Leftrightarrow$ Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$. Es gibt viele Möglichkeiten für Φ.
- Fixpunktiteration:

$$x_{k+1} = \Phi(x_k)$$

- Banachscher Fixpunktsatz:

$$\Phi : E \to E \qquad \text{(Selbstabbildung)}$$
$$\Phi \text{ Kontraktion auf } E$$

  hinreichende Bedingung für Konvergenz der Fixpunktiteration.

- $n = 1$ (skalares Problem): geometrische Darstellung der Fixpunktiteration.

Verständnisfragen

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.

- [ ] Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung x^* in $\mathbb{R}$.
- [x] Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf $E = [-1, 0]$ erfüllt.

Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem auf $E = [0, 1]$. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an. 0.5