

Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Nichtlineare Gleichungssysteme

A. Reusken

K.-H. Brakhage, I. Voulis, H. Saß

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2017

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 5.1-5.6

- ▶ Banachscher Fixpunktsatz
- ▶ Konvergenz und Fehlerschätzung
- ▶ Methoden für skalare Gleichungen

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Wie wendet man den Banachschen Fixpunktsatz an
- ▶ Wie kann man bei einem iterativen Verfahren die Fehler schätzen
- ▶ Spezielle Methoden für skalare Gleichungen

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X . Sei Φ eine **Selbstabbildung** auf E , d.h.

$$\Phi : E \rightarrow E,$$

und ferner eine **Kontraktion auf E** .

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

Dann gilt:

1. Es **existiert genau ein Fixpunkt** x^* von Φ in E .
2. Für beliebiges $x_0 \in E$ **konvergiert**

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

gegen den Fixpunkt x^* .

Banachscher Fixpunktsatz

Sei X ein linear normierter Raum und $E \subseteq X$ eine vollständige Teilmenge von X . Sei Φ eine **Selbstabbildung** auf E , d.h.

$$\Phi : E \rightarrow E,$$

und ferner eine **Kontraktion auf E** .

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq L\|x - y\| \quad \text{für alle } x, y \in E,$$

mit $L < 1$.

3. **A-priori-Fehlerabschätzung:**

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1 - L} \|x_1 - x_0\|.$$

4. **A-posteriori-Fehlerabschätzung:**

$$\|x_k - x^*\| \leq \frac{L}{1 - L} \|x_k - x_{k-1}\|.$$

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.10.

Sei $X = \mathbb{R}$, $E = [a, b]$ und Φ auf E stetig differenzierbar. Es gelte

$$\Phi : [a, b] \rightarrow [a, b] \quad (\text{Selbstabbildung}),$$

und

$$\max_{x \in [a, b]} |\Phi'(x)| =: L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen aus BF-Satz erfüllt für $\|\cdot\| = |\cdot|$

Beachte: Mittelwertsatz

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)(x - y)| \leq \max_{\xi \in [a, b]} |\Phi'(\xi)| |x - y|,$$

d.h. Φ ist eine Kontraktion.

Folgerungen aus Banachscher Fixpunktsatz

Folgerung 5.11.

Sei $X = \mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge.
 $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar. Es gelte

$$\Phi : E \rightarrow E \quad (\text{Selbstabbildung}),$$

und bzgl. $\|\cdot\|$ auf \mathbb{R}^n gelte

$$\max_{x \in E} \|\Phi'(x)\| = L < 1.$$

Dann sind alle Voraussetzungen aus BF-Satz erfüllt.

Hierbei ist $\Phi'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_1(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \Phi_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \Phi_n(x) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \Phi_n(x) \end{pmatrix}$

die Jacobi-Matrix von Φ an der Stelle x .

Beispiel 5.7.

Man berechne die positive Nullstelle der Funktion

$$f(x) := x^6 - x - 1.$$

▶ Die Funktion f hat eine Nullstelle $x^* \in [1, 2]$.

▶ Mögliche Fixpunktfunktionen sind

$$\Phi_1(x) := x^6 - 1 \quad \text{oder} \quad \Phi_2(x) := (x + 1)^{\frac{1}{6}}.$$

▶ $|\Phi_1'(x)| > 1$ für $x \in [1, 2]$,

d.h. Φ_1 ist **nicht als Fixpunktfunktion geeignet**.

▶ $|\Phi_2'(x)| \leq \frac{1}{6}$ für $x \in [0, 2]$, also Lipschitz stetig mit $L = \frac{1}{6}$

▶ Die Funktion Φ_2 ist eine **Selbstabbildung** auf $[0, 2]$,

▶ Matlab-Demo

Beispiel 5.13

Zeigen Sie, dass das System

$$\begin{aligned}6x &= \cos x + 2y \\ 8y &= xy^2 + \sin x\end{aligned}$$

auf $E = [0, 1] \times [0, 1]$ eine eindeutige Lösung besitzt. Bestimmen Sie diese Lösung bis auf eine Genauigkeit von 10^{-3} in der ∞ -Norm.

- ▶ Fixpunktfunktion:

$$\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cos x + \frac{1}{3}y \\ \frac{1}{8}xy^2 + \frac{1}{8} \sin x \end{pmatrix}$$

- ▶ Selbstabbildung: Für $x \in [0, 1]$ gilt $0 \leq \cos x \leq 1$ und $0 \leq \sin x \leq 1$. Daher gilt

$$\Phi : E \rightarrow E.$$

Beispiel 5.13

- ▶ Kontraktion: Die Jacobi-Matrix ist

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \sin x & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{8} y^2 + \frac{1}{8} \cos x & \frac{1}{4} xy \end{pmatrix}.$$

Damit erhält man für die ∞ -Norm auf \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} \|\Phi'(x, y)\|_{\infty} &= \max \left\{ \frac{1}{6} |\sin x| + \frac{1}{3}, \frac{1}{8} (|y^2 + \cos x| + 2|xy|) \right\} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Wegen Folgerung 5.11 existiert genau eine Lösung in E .

- ▶ Fehlerschätzung: Mit $\epsilon = 10^{-3}$ und $L = \frac{1}{2}$ benötigt man maximal

$$k \geq \log \left(\frac{0.5 \times 10^{-3}}{\|x_1 - x_0\|} \right) / \log \left(\frac{1}{2} \right)$$

Schritte.

Beispiel 5.13

Für den Startwert

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$

erhält man als 1. Iterierte

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{1}{6}, 0\right)$$

und damit

$$k \geq \log \left(\frac{0.5 \times 10^{-3}}{1/6} \right) / \log \left(\frac{1}{2} \right) = 8.38,$$

d.h. es werden maximal 9 Iterationen benötigt.

Ergebnisse:

- ▶ Siehe folgende Tabelle.
- ▶ In der dritten Spalte werden die Resultate der **a-posteriori- Fehlerabschätzung** gezeigt.

Beispiel 5.13

k	$(x_0, y_0) = (0, 0),$ $(x_k, y_k) = \Phi(x_{k-1}, y_{k-1})$	$\frac{0.5}{1-0.5^*}$ $\ (x_k, y_k)^T - (x_{k-1}, y_{k-1})^T\ _\infty$
0	(0.00000000, 0.00000000)	–
1	(0.16666667, 0.00000000)	1.67e-01
2	(0.16435721, 0.02073702)	2.07e-02
3	(0.17133296, 0.02046111)	6.98e-03
4	(0.17104677, 0.02132096)	8.60e-04
5	(0.17134151, 0.02128646)	2.95e-04
6	(0.17132164, 0.02132275)	3.63e-05
7	(0.17133430, 0.02132034)	1.27e-05
8	(0.17133314, 0.02132189)	1.56e-06
9	(0.17133369, 0.02132175)	5.52e-07

Aus der a-posteriori-Fehlerabschätzung ergibt sich, dass schon für $k = 4$ (statt $k = 9$) die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Konvergenzordnung und Fehlerschätzung

Ein Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit einer Folge ist der Begriff der **Konvergenzordnung**.

Definition 5.14

Eine konvergente Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^n mit Grenzwert x^* hat die Konvergenzordnung p , falls für ein $k_0 \in \mathbb{N}$

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c \|x_k - x^*\|^p$$

für alle $k \geq k_0$ gilt, wobei

$$0 < c < 1 \quad \text{falls} \quad p = 1.$$

Konvergenzordnung und Fehlerschätzung

Die Konvergenzordnung eines iterativen Verfahrens kann man entsprechend festlegen

Definition

Ein **iteratives Verfahren** zur Bestimmung von $x^* \in \mathbb{R}^n$ (z.B. die Nullstelle einer Funktion) **hat die Konvergenzordnung p** , wenn es eine Umgebung U von x^* gibt, so dass für alle Startwerte aus $U \setminus \{x^*\}$ die **von dem Verfahren erzeugte Folge** gegen x^* konvergiert und **die Konvergenzordnung p hat**.

Beispiel 5.15.

Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit zwischen

1. Verfahren der Ordnung $p = 1$ (lineare Konvergenz), und
2. Verfahren der Ordnung $p = 2$ (quadratische Konvergenz).

Sei $\|x_0 - x^*\| = 0.2$ und $e_k := \|x_k - x^*\|$, dann ergibt sich

1. Linear: $p = 1$ und $c = \frac{1}{2}$

k	1	2	3	4	5	6
$e_k \leq$	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125

2. Quadratisch: $p = 2$ und $c = 3$

k	1	2	3	4	5	6
$e_k \leq$	0.12	0.0432	0.0056	0.000094	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-15}$

Bemerkungen 5.16

Sei

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k), \quad k = 0, 1, \dots,$$

eine **konvergente Fixpunktiteration** mit Fixpunkt \mathbf{x}^* . Mit Hilfe der Taylorreihenentwicklung erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}^* &= \Phi(\mathbf{x}_k) - \Phi(\mathbf{x}^*) \\ &= \Phi'(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*) + \mathcal{O}(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^*\|^2). \end{aligned}$$

Daraus folgt für die **Konvergenzordnung**:

- ▶ wenn $0 \neq \|\Phi'(\mathbf{x}^*)\| < 1$: **Lineare** Konvergenz ($p = 1$).
- ▶ wenn $\Phi'(\mathbf{x}^*) = 0$: **Quadratische** Konvergenz ($p = 2$).

Für die meisten in der Praxis benutzten Methoden zur Nullstellenbestimmung gilt $p = 1$ (lineare Konvergenz) oder $p = 2$ (quadratische Konvergenz).

Fehlerschätzung für skalare Folgen

Es gelte $e_k := x^* - x_k$ und $A_k := \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$

Lemma 5.17.

Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x^* .

Aus

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{e_k} = A \in (-1, 1), \quad A \neq 0,$$

folgt, daß die **Konvergenzordnung** der Folge **genau 1** ist und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{A_k}{1 - A_k} (x_k - x_{k-1})}{e_k} = 1.$$

Wenn die Folge die **Konvergenzordnung** $p > 1$ hat, gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{k+1} - x_k) / e_k = 1.$$

Fehlerschätzung für skalare Folgen

Es ergeben sich einfache a-posteriori-Fehlerschätzungen (für k hinreichend groß) aus den Resultaten in Lemma 5.17 :

$$p = 1 : x^* - x_k \approx \frac{A_k}{1 - A_k} (x_k - x_{k-1}),$$

wobei $A_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$ etwa konstant sein sollte.

$$p > 1 : x^* - x_k \approx x_{k+1} - x_k.$$

Beachte:

Für $p = 1$ (lineare Konvergenz) ist

$$|x_k - x_{k-1}| \quad \text{oder} \quad |x_{k+1} - x_k|$$

meist **keine** sinnvolle Schätzung der Größe des Fehlers $|x^* - x_k|$.

5.18. Beispiel

Für die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$ aus Beispiel 5.7 sind einige Resultate in Tabelle 5.3 zusammengestellt:

k	$x_0 = 0.5, x_{k+1} = \Phi_2(x_k)$	$A_k = \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1} - x_{k-2}}$	$\frac{A_k}{1 - A_k}(x_k - x_{k-1})$	$x^* - x_k$
0	0.5000000000000	–	–	6.35e–01
1	1.069913193934	–	–	6.48e–02
2	1.128908359044	0.1035161	6.81e–03	5.82e–03
3	1.134208317737	0.0898372	5.23e–04	5.16e–04
4	1.134678435924	0.0887022	4.58e–05	4.57e–05
5	1.134720089466	0.0886023	4.05e–06	4.05e–06
6	1.134723779696	0.0885934	3.59e–07	3.59e–07
7	1.134724106623	0.0885926	3.18e–08	3.18e–08
8	1.134724135586	0.0885926	2.82e–09	2.82e–09
9	1.134724138152	0.0885926	2.49e–10	2.49e–10
10	1.134724138379	0.0885925	2.21e–11	2.21e–11

Fehlerschätzung für Vektorfolgen

Lemma 5.19.

Sei $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in \mathbb{R}^n mit Grenzwert x^* und Konvergenzordnung $p > 1$.

Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x_k\|}{\|e_k\|} = 1.$$

Aus diesem Resultat ergibt sich folgende Fehlerschätzung:

$$p > 1 : \|x_k - x^*\| \approx \|x_{k+1} - x_k\|, \quad \text{für } k \text{ genügend groß.}$$

Es sei bemerkt, daß im skalaren Fall **der Fehler** e_k und im vektoriellen Fall die **Größe des Fehlers**, $\|e_k\|$, geschätzt wird.

Methode für skalare Gleichungen: Bisektion

Algorithmus 5.20.

Gegeben $a_0 < b_0$ mit $f(a_0)f(b_0) < 0$.

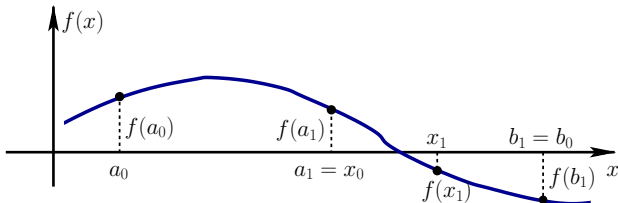
Für $k = 0, 1, 2, \dots$ berechne:

▶ $x_k = \frac{1}{2}(a_k + b_k), f(x_k).$

▶ Setze

$$a_{k+1} = a_k, \quad b_{k+1} = x_k \quad \text{falls } f(x_k)f(a_k) \leq 0$$

$$a_{k+1} = x_k, \quad b_{k+1} = b_k \quad \text{sonst.}$$



Beispiel 5.21.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [0, 2]$ der Funktion $f(x) = x^6 - x - 1$ mittels Bisektion (vgl. Beispiel 5.7).

Die Bisektion mit Startwerten $a_0 = 0$ und $b_0 = 2$ liefert:

k	a_k	b_k	x_k	$b_k - a_k$	$f(x_k)$
0	0.00000	2.00000	1.00000	2.00000	-1.00000
1	1.00000	2.00000	1.50000	1.00000	8.89062
2	1.00000	1.50000	1.25000	0.50000	1.56470
3	1.00000	1.25000	1.12500	0.25000	-0.09771
4	1.12500	1.25000	1.18750	0.12500	0.61665
5	1.12500	1.18750	1.15625	0.06250	0.23327
6	1.12500	1.15625	1.14062	0.03125	0.06158
7	1.12500	1.14062	1.13281	0.01562	-0.01958
8	1.13281	1.14062	1.13672	0.00781	0.02062
9	1.13281	1.13672	1.13477	0.00391	0.00043
10	1.13281	1.13477	1.13379	0.00195	-0.00960

Methode für skalare Gleichungen: Newton-Verfahren

Ziel: Konstruiere Φ so, dass die Fixpunktiteration $\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k)$ möglichst schnell konvergiert.

Ansatz:

- ▶ Setze $\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - M_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x})$, wobei hier $M_{\mathbf{x}} = g(\mathbf{x})$ (skalar).
- ▶ Wähle $g(\mathbf{x})$ so, dass $\Phi'(\mathbf{x}^*) = 0$.

Es gilt: $\Phi'(\mathbf{x}^*) = 0 \iff g(\mathbf{x}^*) = \frac{1}{f'(\mathbf{x}^*)}$,

und daraus folgt $\Phi(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - \frac{f(\mathbf{x})}{f'(\mathbf{x})}$.

Newton-Verfahren

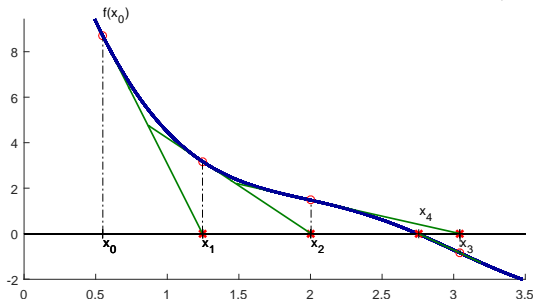
$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \frac{f(\mathbf{x}_k)}{f'(\mathbf{x}_k)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Geometrische Herleitung des Newton-Verfahrens

$$\text{Es gilt } f(x) = \underbrace{f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k)}_{=: T(x)} + \frac{1}{2}(x - x_k)^2 f''(\xi_k)$$

$T(x)$ entspricht der **Tangente** von f bei x_k . So gilt dann

$$T(x_{k+1}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$



Konvergenz Newton-Verfahren

Satz 5.22.

Sei f zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung $U = (a, b)$ von x^* , und es gelte

$$f(x^*) = 0$$

$$f'(x^*) \neq 0$$

Für $x_k \in U$ und

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

gilt

$$x_{k+1} - x^* = \frac{1}{2} \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} (x_k - x^*)^2, \quad \xi_k \in U,$$

also ist das **Newton-Verfahren lokal quadratisch konvergent**.

Beispiel 5.23.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [0, 2]$ der Funktion $f(x) = x^6 - x - 1$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens (vgl. Beispiel 5.7 & 5.21).

Newton-Iteration $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^6 - x_k - 1}{6x_k^5 - 1}$ liefert die

Resultate:

k	$x_0 = 0.5$	$x_0 = 2$	$x_{k+1} - x_k$
0	0.5000000000000000	2.0000000000000000	-3.19e-01
1	-1.32692307692308	1.68062827225131	-2.50e-01
2	-1.10165080870249	1.43073898823906	-1.76e-01
3	-0.92567640260338	1.25497095610944	-9.34e-02
4	-0.81641531662254	1.16153843277331	-2.52e-02
5	-0.78098515830640	1.13635327417051	-1.62e-03
6	-0.77810656986872	1.13473052834363	-6.39e-06
7	-0.77808959926268	1.13472413850022	-9.87e-11
8	-0.77808959867860	1.13472413840152	0.00e+00
9	-0.77808959867860	1.13472413840152	-

Beispiel 5.24.

Man berechne \sqrt{a} für ein $a > 0$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens.

Ansatz: Die Wurzel von a , \sqrt{a} , ist Lösung von

$$f(x) := x^2 - a = 0.$$

Das Newton-Verfahren ergibt hier $x_{k+1} = \frac{1}{2}(x_k + a/x_k)$ und liefert die Resultate:

k	x_k	$x_{k+1} - x_k$	$\sqrt{2} - x_k$
0	100.00000000000000	-5.00e+01	-9.86e+01
1	50.01000000000000	-2.50e+01	-4.86e+01
2	25.02499600079984	-1.25e+01	-2.36e+01
3	12.55245804674590	-6.20e+00	-1.11e+01
4	6.35589469493114	-3.02e+00	-4.94e+00
5	3.33528160928043	-1.37e+00	-1.92e+00
6	1.96746556223115	-4.75e-01	-5.53e-01
7	1.49200088968972	-7.58e-02	-7.78e-02
8	1.41624133202894	-2.03e-03	-2.03e-03
9	1.41421501405005	-1.45e-06	-1.45e-06
10	1.41421356237384	-	-7.45e-13

Newton-Verfahren Demos

Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens:

- ▶ Im allg. nur **lokale** Konvergenz
- ▶ Manchmal **globale** Konvergenz
- ▶ **Lokale quadratische** Konvergenz
- ▶ Endlose Iteration möglich
- ▶ Divergenz kann auftreten

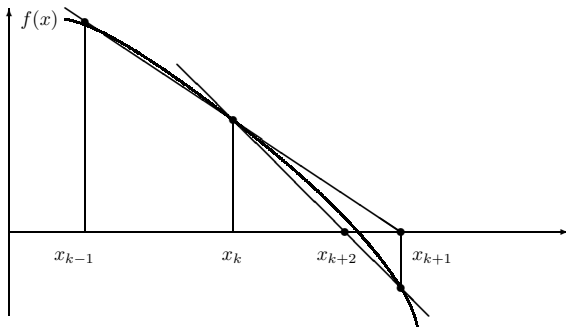
Merke:

- ▶ Quadratische Konvergenz nur lokal
- ▶ Guter Startwert ist wichtig

Methode für skalare Gleichungen: Sekanten-Verfahren

Idee:

- ▶ Ersetzen der **Tangente** $T(x)$ im Newton-Verfahren durch eine **Sekante**
- ▶ Nullstelle der Sekante ergibt neue Annäherung



Sekanten-Verfahren

Sekanten-Verfahren

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_kf(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \\ &= x_k - f(x_k) \left(\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \right)\end{aligned}$$

Vorteile gegenüber Newton-Verfahren

- ▶ Berechnung der Ableitung $f'(x)$ wird vermieden.
- ▶ Effizienter, wenn Auswertung von $f'(x)$ und $f(x)$ etwa gleich teuer.

Nachteile gegenüber Newton-Verfahren

- ▶ Konvergenzordnung lokal $p \approx 1.6$.
- ▶ Verfahren benötigt zwei Startwerte.

Beispiel 5.26.

Bestimmen Sie die Nullstelle $x^* \in [0, 2]$ der Funktion $f(x) = x^6 - x - 1$ mit Hilfe des Sekanten-Verfahrens (vgl. Beispiel 5.7, 5.21 & 5.23).

k	x_k	$x_{k+1} - x_k$
0	2.0000000000000000	-1.00e+00
1	1.0000000000000000	1.61e-02
2	1.01612903225806	1.74e-01
3	1.19057776867664	-7.29e-02
4	1.11765583094155	1.49e-02
5	1.13253155021613	2.29e-03
6	1.13481680800485	-9.32e-05
7	1.13472364594870	4.92e-07
8	1.13472413829122	1.10e-10
9	1.13472413840152	-

Die Werte in der dritten Spalte ergeben eine Fehlerabschätzung.

Zusammenfassung

- ▶ **Konvergenzordnung**: Maß für die Konvergenzgeschwindigkeit
- ▶ **Fehlerschätzung** hängt von p (Konvergenzordnung) ab.
 - Skalare Folgen : einfache Formeln $p = 1, p > 1$
 - Vektorfolgen : einfache Formel nur für $p > 1$.
- ▶ Methoden für **skalare** Probleme: Bisektion,
Newton-Verfahren,
Sekanten-Verfahren
- ▶ **Newton-Verfahren**: lokale Konvergenz,
 $p = 2$,
einfache Fehlerschätzung

Verständnisfragen

Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = |x|^{2.5} - 3$.

- f hat eine eindeutige Nullstelle x^* in $[0, \infty)$.
- Die Bisektionsmethode, mit den Startwerten $a_0 = -1$ und $b_0 = 2$ konvergiert gegen eine Nullstelle.
- Sei x_0 ein Startwert aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^* , und x_k , $k \geq 1$, die mit dem Newton-Verfahren berechnete Folge.
Es gilt $|x_k - x^*| \approx (x_k - x_{k+1})^2$ für k hinreichend groß.
- Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen eine Nullstelle.

Verständnisfragen

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt.

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.

Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x .

Es seien $n = 1$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei $\Phi(x) := x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Bestimmen Sie $\Phi'(x^*)$.

Es seien $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det M \neq 0$, und $\Phi(x) := x - Mf(x)$. Das Nullstellenproblem $f(x) = 0$ hat dieselbe Lösungen wie das das Fixpunktproblem $\Phi(x) = x$.

Verständnisfragen

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt.

Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.

Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x .

- Die Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion konvergiert nur dann, wenn die Startwerte x_0, x_1 dieser Methode so gewählt werden, dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.