

Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Nichtlineare Gleichungssysteme

A. Reusken

K.-H. Brakhage, I. Voulis, H. Saß

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2017

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 5.6-6.1

- ▶ Newton-Verfahren für Systeme:
 - ▶ Methode
 - ▶ Konvergenzeigenschaften
 - ▶ Varianten der Methode

Kapitel 6

- ▶ Nichtlineare Ausgleichsrechnung: Problemstellung

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Eigenschaften des Newton-Verfahrens
- ▶ Wie sieht das vereinfachte Newton-Verfahren aus
- ▶ Weshalb verwendet man Dämpfung
- ▶ Wie ist die Problemstellung bei einem nichtlinearen Ausgleichsproblem

Newton-Verfahren für Systeme

Aufgabe

Sei $f = (f_1, \dots, f_n)^T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (für $n > 1$) eine zweimal stetig differenzierbare **vektorwertige** Funktion. Bestimme $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$f(x^*) = 0$$

erfüllt ist.

- Notation: Wir bezeichnen die Lösung am Iterationsschritt k mit

$$x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^T \in \mathbb{R}^n.$$

- Zur Erinnerung: **Taylorentwicklung** (für $i = 1, 2, \dots, n$)

$$f_i(x) = f_i(x^k) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i(x^k)}{\partial x_j} (x_j - x_j^k) + \mathcal{O}(\|x - x^k\|_2^2).$$

Das Newton-Verfahren für Systeme

- Taylorentwicklung kompakt

$$f(x) = f(x^k) + f'(x^k)(x - x^k) + \mathcal{O}(\|x - x^k\|_2^2)$$

mit der Jacobi-Matrix

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

- Für die Nullstelle x^{k+1} der linearen Näherung von f in x^k folgt (vgl. Tangente)

$$0 = f(x^k) + f'(x^k)(x^{k+1} - x^k),$$

und hieraus erhält man

$$x^{k+1} = x^k - (f'(x^k))^{-1} f(x^k).$$

Das Newton-Verfahren für Systeme

Algorithmus 5.28 (Newton-Iteration)

Gegeben: Startwert x^0 .

Für $k = 0, 1, 2, \dots$:

1. Berechne $f(x^k), f'(x^k)$
2. Löse das **lineare** Gleichungssystem in s^k
$$f'(x^k)s^k = -f(x^k).$$
3. Setze (Newton-Korrektur)

$$x^{k+1} = x^k + s^k$$

Beachte:

- ▶ Schritt 2 erfordert die Lösung eines $n \times n$ linearen Gleichungssystems $\Rightarrow$ LR-Zerlegung.
- ▶ Die Inverse von $f'(x^k)$ wird nicht explizit berechnet.

Beispiel 5.29

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$f_1(x_1, x_2) = 6x_1 - \cos x_1 - 2x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 8x_2 - x_1x_2^2 - \sin x_1 = 0$$

Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x^0 = (0, 0)^T$ durch.

- Berechnung der Jacobi-Matrix

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 6 + \sin x_1 & -2 \\ -x_2^2 - \cos x_1 & 8 - 2x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

- Berechnung von $f(x^0)$ und $f'(x^0)$

$$f(x^0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f'(x^0) = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 5.29

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$f_1(x_1, x_2) = 6x_1 - \cos x_1 - 2x_2 = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 8x_2 - x_1x_2^2 - \sin x_1 = 0$$

Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens ausgehend vom Startwert $x^0 = (0, 0)^T$ durch.

- Berechnung der Newton-Korrektur s^0 aus

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s^0 = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Berechnung von x^1 ergibt schließlich

$$x^1 = x^0 + s^0 = \frac{1}{46} \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Satz 5.31.

Annahmen:

- ▶ Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex
- ▶ Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar
- ▶ Jacobi-Matrix $f'(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 - ▶ invertierbar
$$\det(f'(x)) \neq 0, \quad \text{für alle } x \in \Omega$$
 - ▶ die Inverse beschränkt durch eine Konstante β
$$\|(f'(x))^{-1}\| \leq \beta \quad \text{für alle } x \in \Omega.$$
 - ▶ Lipschitz-stetig auf Ω mit einer Konstanten γ
$$\|f'(x) - f'(y)\| \leq \gamma \|x - y\|, \quad x, y \in \Omega.$$
- ▶ Es existiere eine Lösung x^* von $f(x) = 0$ in Ω .

Satz 5.31.

Der Startwert x^0 erfülle

$$x^0 \in K_\omega(x^*) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x^* - x\| < \omega\}$$

mit ω hinreichend klein, so dass $K_\omega(x^*) \subset \Omega$ und

$$\omega \leq \frac{2}{\beta\gamma}.$$

Dann bleibt die durch das Newton-Verfahren definierte Folge $\{x^k\}_{k=0}^\infty$ innerhalb von $K_\omega(x^*)$ und **konvergiert quadratisch** gegen x^* :

$$\|x^{k+1} - x^*\| \leq \frac{\beta\gamma}{2} \|x^k - x^*\|^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Beispiel 5.2 (Erinnerung)

Statt der **linearen** Integralgleichung im Beispiel 3.3 ist nun eine **nicht-lineare** Integralgleichung zu lösen:

Gesucht ist eine Funktion $u(x) \geq 0$, die die **Integralgleichung**

$$u(x) + 2 \int_0^1 \cos(xt) u(t)^3 dt = 2, \quad x \in [0, 1]$$

erfüllt.

Beispiel 5.33.

Aus Beispiel 5.2 ergibt sich für $n = 60$ das Gleichungssystem

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{60}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 60,$$

wobei

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_{60}) = x_i + \frac{1}{60} \sum_{j=1}^{60} \cos \left(\frac{(i - \frac{1}{2})(j - \frac{1}{2})}{3600} \right) x_j^3 - 2.$$

Für die **Jacobi-Matrix** erhält man

$$(f'(x))_{i,j} = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{20} \cos \left(\frac{(i - \frac{1}{2})^2}{3600} \right) x_i^2 & \text{für } i = j \\ \frac{1}{20} \cos \left(\frac{(i - \frac{1}{2})(j - \frac{1}{2})}{3600} \right) x_j^2 & \text{für } i \neq j. \end{cases}$$

Beispiel 5.33.

In jedem Iterationsschritt des Newton-Verfahrens werden

- ▶ die Jacobi-Matrix $f'(x^k)$ und der Funktionswert $f(x^k)$ berechnet,
- ▶ das lineare Gleichungssystem $f'(x^k)s^k = -f(x^k)$ gelöst,
- ▶ $x^{k+1} = x^k + s^k$ berechnet.

Ergebnisse für den Startwert $x^0 = (2, 2, \dots, 2)^T$:

k	$\ f(x^k)\ _2$	$\ x^{k+1} - x^k\ _2$
0	5.87e+01	4.75e+00
1	1.50e+01	2.31e+00
2	2.52e+00	5.78e-01
3	1.31e-01	3.32e-02
4	4.10e-04	1.05e-04
5	4.09e-09	1.05e-09
6	2.51e-15	—

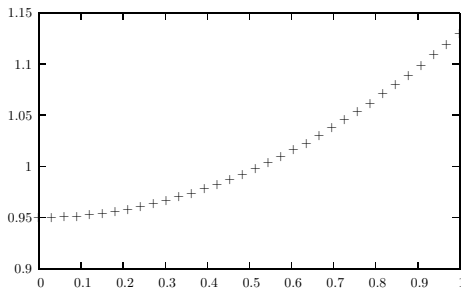
Die dritte Spalte zeigt die Fehlerschätzung

Beispiel 5.33.

Es gilt

$$x_i^6 \approx u(t_i) = u\left(\frac{i - \frac{1}{2}}{60}\right), \quad i = 1, 2, \dots, 60.$$

Diese Näherung der Funktion $u(x)$, $x \in [0, 1]$, ist in folgender Abbildung dargestellt:



Hinweise zur praktischen Durchführung

1. Das vereinfachte Newton-Verfahren

Problem: Jeder Schritt erfordert Aufstellen und Lösung des $n \times n$ linearen Gleichungssystems

$$f'(x^k)s^k = -f(x^k).$$

Ansatz:

- ▶ Aufstellen der Jacobi-Matrix im ersten Schritt $f'(x^0)$.
- ▶ Statt $f'(x^k)$ verwende $f'(x^0)$ zur Bestimmung der Newton-Korrektur, d.h.

$$f'(x^0)s^k = -f(x^k), \quad x^{k+1} = x^k + s^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- ▶ LR-Berechnung effizient (“mehrere rechte Seiten”)
- ▶ **Beachte:**
 - ▶ quadratische Konvergenz geht verloren
 - ▶ evtl. neue Berechnung von f' nach ca. 3-5 Schritten

Hinweise zur praktischen Durchführung

2. Auswertung der Jacobi-Matrix

Problem: Einträge der Jacobi-Matrix, $\partial f_i(x^k)/\partial x_j$, nicht oder nur schwer in geschlossener Form berechenbar.

Ansatz:

- Annäherung durch **numerische Differentiation**

$$\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \approx \frac{f_i(x + he^j) - f_i(x)}{h},$$

wobei e^j der j -te Einheitsvektor ist.

- Wahl von h : (→ **Kapitel "Interpolation"**)
 - zu groß verringert Genauigkeit der Approximation und damit Konvergenz
 - zu klein birgt Gefahr der Auslöschung
- **Siehe auch:** Quasi-Newton-Verfahren (BFGS)

Hinweise zur praktischen Durchführung

3. Homotopieverfahren

Problem: Bestimmung eines “guten” Startwerts.

Ansatz:

- ▶ Benütze Problemparameter oder künstlich eingeführten Parameter μ zur Definition einer Familie von Problemen $F(x, \mu) = 0$, so dass F für ein μ einfach lösbar ist.
- ▶ Beispiel: Nichtlineare Diffusion

$$u_t = \operatorname{div}(k(u) \nabla u)$$

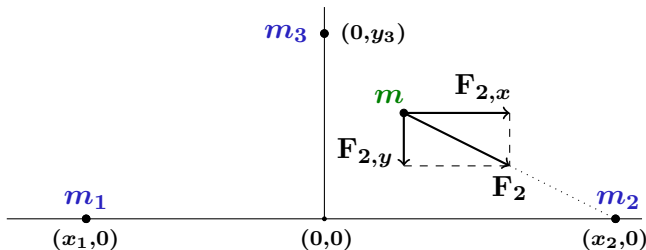
mit Wärmeleitfähigkeit $k(u) = c_1 + c_2 u$. Wähle $\mu = c_2$.

1. Setze $\mu = 0$. Löse das lineare Problem $F(u, \mu = 0) = 0$.
2. Setze $\mu = \mu + \Delta\mu$ (klein) und nehme alte Lösung als Startwert für das Problem $F(u, \mu) = 0$.
3. Iteriere bis Newton konvergiert, gehe zu 2. Falls $\mu = c_2$: STOP.

Beispiel 5.1 & 5.34

4. Wahl des Startwerts

Bestimme den Punkt (x, y) , so dass für eine Punktmasse m an der Stelle (x, y) die Gravitationskräfte F_i zwischen m und m_i im Gleichgewicht sind.



Beispiel 5.1 & 5.34

- ▶ Gravitationskraft zwischen zwei Punktmassen M_1 und M_2 mit gegenseitigem Abstand r :

$$F = G \frac{M_1 M_2}{r^2},$$

wobei $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}$.

- ▶ Hilfsgrößen

$$r_i := \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},$$

$$F_i := G \frac{m_i m}{r_i^2},$$

$$F_{i,x} := \frac{F_i(x_i - x)}{r_i}, \quad F_{i,y} := \frac{F_i(y_i - y)}{r_i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

- ▶ Gleichgewichtsbedingungen

$$F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} = 0, \quad F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} = 0.$$

Beispiel 5.1 & 5.34

- Hieraus ergibt sich das **nichtlineare Gleichungssystem**

$$f_1(x, y) = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i(x_i - x)}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}} = 0$$

$$f_2(x, y) = \sum_{i=1}^3 \frac{m_i(y_i - y)}{((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2)^{3/2}} = 0$$

- Für f_1, f_2 gilt

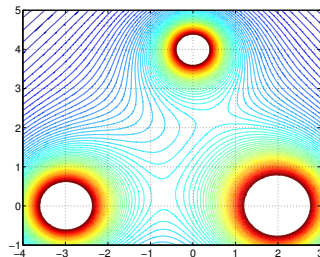
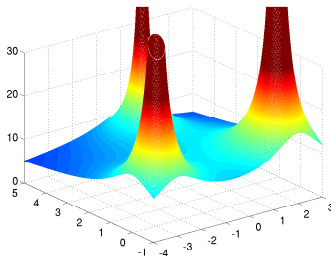
$$\begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \nabla U(x, y),$$

wobei das **Potential** U gegeben ist durch

$$U(x, y) := \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{((x_i - x)^2 + (y_i - y)^2)^{1/2}}$$

Beispiel 5.1 & 5.34

- Wahl des Startwerts: (x^*, y^*) ist genau dann Lösung des Systems, wenn (x^*, y^*) ein lokales Minimum, lokales Maximum oder ein Sattelpunkt des Potentials U ist.
- Das Potential U hat zwei Sattelpunkte und keine lokalen Maxima oder Minima.
Das System hat also **genau zwei Lösungen**.



Beispiel 5.1 & 5.34

- ▶ Anhand der Graphik kann man geeignete Startwerte wählen.
- ▶ Ergebnisse des Newton-Verfahrens:

k	x^k	y^k	$\ f(x^k, y^k)\ _2$	$\ (x^k, y^k) - (x^{k+1}, y^{k+1})\ _2$
0	-0.8000000000000000	0.2000000000000000	3.25e-01	1.31e-01
1	-0.697601435074387	0.281666888630281	1.03e-02	4.45e-03
2	-0.694138545697644	0.284468076535443	1.09e-05	4.09e-06
3	-0.694134676058600	0.284469396792393	9.67e-12	4.57e-12
4	-0.694134676055255	0.284469396789285	2.02e-16	-

k	x^k	y^k	$\ f(x^k, y^k)\ _2$	$\ (x^k, y^k) - (x^{k+1}, y^{k+1})\ _2$
0	0.5000000000000000	2.2000000000000000	1.87e-01	6.32e-02
1	0.4803549525148845	2.260066598359946	4.51e-03	2.27e-03
2	0.4825811382211886	2.259618040348963	4.01e-06	1.75e-06
3	0.4825819025667199	2.259619618799409	3.13e-12	1.59e-12
4	0.4825819025657873	2.259619618798127	3.33e-16	-

Nichtlineare Ausgleichsrechnung

Kapitel 6:

Nichtlineare Ausgleichsrechnung

Zur Erinnerung: Lineares Ausgleichsproblem

Beispiel: Polynomial Data-Fitting

Gegeben:

- ▶ m Messungen an den Punkten $y_1, y_2, \dots, y_m$ mit zugehörigen Daten $z_1, z_2, \dots, z_m$.
- ▶ Polynom $(n - 1)$ -ter Ordnung (wobei $n < m$)

$$f(y) = c_0 + c_1 y + \dots + c_{n-1} y^{n-1}$$

Gesucht:

- ▶ Koeffizienten $c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$, so dass die **Summe der Fehlerquadrate**

$$\sum_{i=1}^m (f(y_i) - z_i)^2$$

minimal wird.

Zur Erinnerung: Lineares Ausgleichsproblem

In Matrix-Vektor Notation

$$\|A x^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|A x - b\|_2$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & y_1 & \cdots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & \cdots & y_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & y_m & \cdots & y_m^{n-1} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix}$$

Wesentliche Eigenschaft

Die unbekannten Koeffizienten/Parameter tauchen **linear** auf
bzw.

es lassen sich entsprechende Parameter definieren/identifizieren.

Beim nichtlinearen Ausgleichsproblem ist dies nicht mehr möglich...

Beispiel 6.1

Differentialgleichung einer gedämpften Schwingung:

$$m u'' + b u' + D u = 0,$$

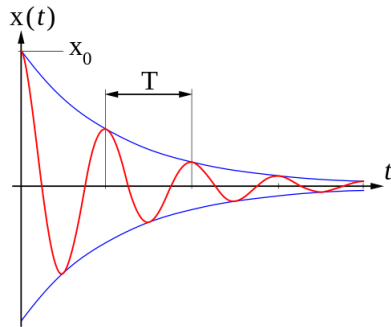
mit Masse m , Dämpfungskonstante b und Federkonstante D .

Lösungen haben die Form:

$$u(t) = u_0 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi_0),$$

wobei:

u_0	...	Anfangswert
φ_0	...	Nullphasenwinkel
δ	...	Abklingkonstante
ω_d	...	Eigenkreisfrequenz



Quelle: wikipedia

Beispiel 6.1

Gegeben:

- ▶ 10 Messungen an den Punkten $t_1, t_2, \dots, t_{10}$ mit zugehörigen Daten $b_1, b_2, \dots, b_{10}$.
- ▶ Modell einer gedämpften Schwingung

$$y(t; x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 e^{-x_2 t} \sin(x_3 t + x_4)$$

mit Parametern $x_1, \dots, x_4$.

Gesucht:

- ▶ Parameter $x_1, \dots, x_4$, so dass die Summe der Fehlerquadrate

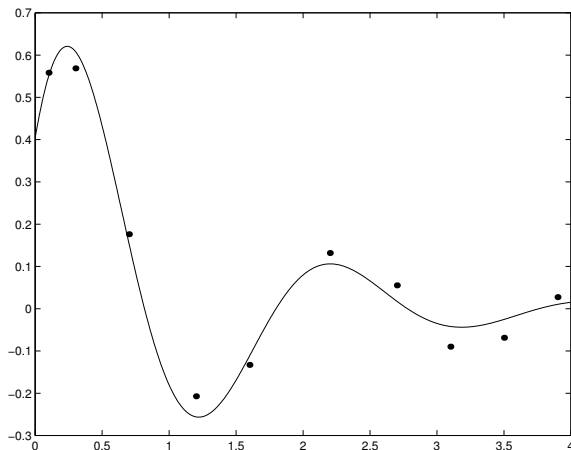
$$\sum_{i=1}^{10} (x_1 e^{-x_2 t_i} \sin(x_3 t_i + x_4) - b_i)^2 = \|F(x)\|_2^2$$

minimal wird. Hierbei ist $F: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^{10}$ definiert durch

$$\begin{aligned} F_i(x) &= F_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= x_1 e^{-x_2 t_i} \sin(x_3 t_i + x_4) - b_i, \quad i = 1, \dots, 10. \end{aligned}$$

Beispiel 6.1

Berechnete Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems:

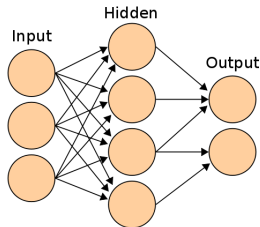


Neuronale Netze

- ▶ Mehrlagiges Perzeptron
 - ▶ n_k Neuronen in der k -ten Schicht
 - ▶ Aktivierungsfunktion eines Neurons: skalare Abbildung $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (single input-single output map)
- ▶ Ausgang des j -ten Neurons der $(k + 1)$ -ten Schicht

$$x_{k+1}^j = \phi \left(u_k^{0j} + \sum_{s=1}^{n_k} x_k^s u_k^{sj} \right), \quad j = 1, \dots, n_{k+1},$$

wobei u_k^{sj} die zu bestimmenden Gewichte sind.



Neuronale Netze

- ▶ Mehrlagiges Perzeptron mit N Schichten: parameterabhängige Abbildung h , die den Eingangsvektor x_0 in den Ausgangsvektor $x_N = h(u, x_0)$ abbildet, wobei

$$u = \{u_k^{sj} \mid k = 0, \dots, N-1, s = 0, \dots, n_k, j = 1, \dots, n_{k+1}\}$$

- ▶ Gegeben seien m Eingabe-/Ausgabedaten $(y_1, z_1), \dots, (y_m, z_m)$ eines physikalischen Systems.
- ▶ **Lernverfahren**: Minimiere Ausgabefehler

$$\min_u \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \|z_i - h(u, y_i)\|^2$$

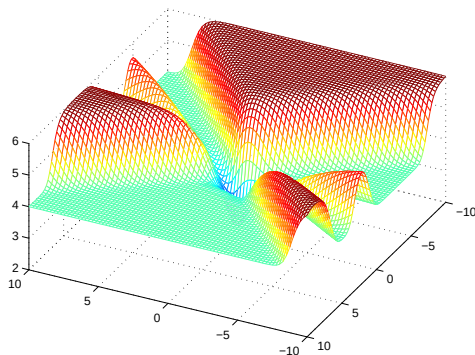
- ▶ Typische Aktivierungsfunktionen der Neuronen

$$\phi(\xi) = \frac{1}{1 + e^{-\xi}}, \quad \phi(\xi) = \tanh(\xi)$$

Neuronale Netze – Beispiel

Lernverfahren ($m = 5$, Gewichte u_0, u_1)

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^5 \left(z_i - \phi(u_1 y_i + u_0) \right)^2$$



Definition

Definiert man allgemein die Abbildung ($m > n$)

$$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad F_i(x) := y(t_i; x) - b_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

kann das **nichtlineare Ausgleichsproblem** wie folgt formuliert werden:

Nichtlineares Ausgleichsproblem

Bestimme $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2,$$

oder, äquivalent,

$$\phi(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \phi(x),$$

wobei $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi(x) := \frac{1}{2} \|F(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$.

Definition

Zur Erinnerung: Die Funktion

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \|F(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$$

hat in einem Punkt x^* ein **lokales Minimum**, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

1. $\nabla \phi(x^*) = 0$ (d.h., x^* ist kritischer Punkt von ϕ),
2. $\phi''(x^*) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch positiv definit.

Es läßt sich durch Nachrechnen bestätigen, dass

$$\begin{aligned}\nabla \phi(x) &= F'(x)^T F(x), \\ \phi''(x) &= F'(x)^T F'(x) + \sum_{i=1}^m F_i(x) F_i''(x),\end{aligned}$$

mit Jacobi-Matrix $F'(x) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und

$$\text{Hesse-Matrix } F_i''(x) := \left(\frac{\partial^2 F_i(x)}{\partial x_j \partial x_k} \right)_{1 \leq j, k \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Zusammenfassung

- ▶ Newton-Verfahren: Konvergenzordnung: $p = 2$, lokale Konvergenz
 - ▶ Stoppkriterium: $\|x^* - x^k\| \approx \|x^{k+1} - x^k\|$
- ▶ Vereinfachtes Newton-Verfahren: feste Jacobi-Matrix
- ▶ Wahl des Startvektors: problemabhängig, Homotopieverfahren
- ▶ Über Dämpfung kann man den Einzugsbereich vergrößern

Verständnisfragen

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung U von x^* und es gelte $f(x^*) = 0$.

Wir nehmen an, dass $\det(f'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$, und betrachten die Newton-Methode zur Bestimmung von x^* :

$$x_0 \in U, \quad x_{k+1} = x_k - (f'(x_k))^{-1} f(x_k) \quad \text{für } k \geq 0.$$

- ☒ Die Newton-Methode ist lokal quadratisch konvergent.
- ☒ Wenn das Newton-Verfahren konvergiert, dann gilt für genügend große Werte von k : $\|x_k - x^*\| \approx \|x_k - x_{k+1}\|$.
- ☐ Beim Newtonverfahren kann eine Dämpfungsstrategie benutzt werden, die dazu dient für jeden Startwert die Konvergenz des Verfahrens zu gewährleisten.
- ☐ Beim Newtonverfahren kann eine Dämpfungsstrategie benutzt werden, die dazu dient Auslöschungseffekte bei der Berechnung der Korrektur zu vermeiden.