Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Interpolation

A. Reusken

K.-H. Brakhage, I. Voulis, H. Saß

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2017

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 8.1-8.3

- Lagrange-Interpolationsaufgabe
- Effiziente Auswertung des Interpolationspolynoms
- Unterschiedliche Darstellungen des Interpolationspolynoms
- Newtonsche Darstellung

Was Sie mitnehmen sollten:

- Effiziente Auswertung eines Interpolationspolynoms
- Möglichkeiten zur Darstellung eines Interpolationspolynoms
- Newtonsche Interpolationsformel

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation

Finde für gegebene Stützstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Bemerkungen

- Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j \, x^j \,|\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- "Lagrange": Interpolation der Funktionswerte.
- Weitere Möglichkeiten:
  - Hermite-Interpolation: zusätzlich Interpolation der Ableitungen.
  - Trigonometrische Interpolation, Spline-Interpolation, ...

Fragen

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms?
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?
- Welchen Fehler machen wir?
- Wie können wir den Fehler reduzieren?

Wichtig für: Numerische Differentiation, Integration, Computergraphik und viele weitere Anwendungen...

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h. zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere läßt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten Lagrange-Fundamentalpolynome sind.

Lagrange-Fundamentalpolynome

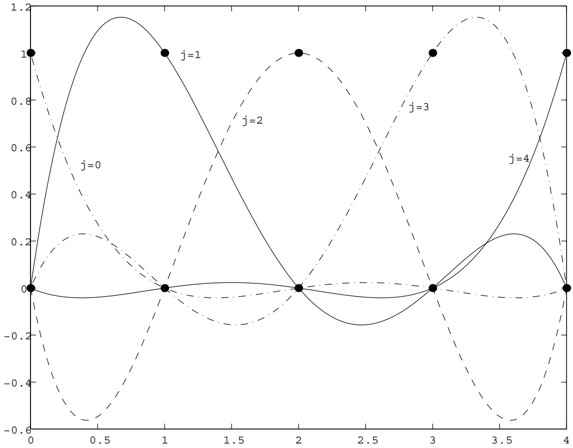
Für den Fall äquidistanter Stützstellen

$$x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \dots, n$$

gilt

$$\begin{aligned} \hat{\ell}_{jn}(t) := \ell_{jn}(x_0 + th) &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x_0 + th - (x_0 + kh)}{x_0 + jh - (x_0 + kh)} \\ &= \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{(t-k)}{(j-k)} \\ &= \frac{(-1)^{n-j}}{j!(n-j)!} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (t-k). \end{aligned}$$

Lagrange-Fundamentalpolynome



$n = 4$

$\hat{\ell}_{j4}(t)$

$t \in [0, 4]$

Existenz und Eindeutigkeit

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \ldots, x_n$ wird mit

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)$$

bezeichnet.

Aus der Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms ergibt sich folgende Eigenschaft:

- Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ gilt

$$P(Q|x_0, \ldots, x_n) = Q.$$

Begründung: Q interpoliert sich selbst und muss wegen der Eindeutigkeit damit gleich dem Interpolationspolynom sein.

Fragen

Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?
   - Neville-Aitken

2. Darstellung in geschlossener Form?
   $\sim$ Wahl einer Basis in $\mathbf{\Pi}_n$.
   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig: Die Lösung in 2., d.h. das Interpolationspolynom, ist immer das gleiche!

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als Konvexkombination der beiden Punkte darstellbar, d.h.

$$
\begin{aligned}
P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1) \\
&= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}f(x_0)
\end{aligned}
$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als Konvexkombination der beiden interpolierende Geraden darstellbar,

$$
P(f|x_0,x_1,x_2)(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}P(f|x_1,x_2)(x)+\frac{x_2-x}{x_2-x_0}P(f|x_0,x_1)(x)
$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6 (Aitken).

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0} P(f|x_1,\ldots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0} P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x).$$

Die Interpolierende an den Stellen $\{x_0,\ldots,x_n\}$ ist eine Konvexkombination der Interpolierenden niedrigeren Grades an den Teilmengen $\{x_1,\ldots,x_n\}$ und $\{x_0,\ldots,x_{n-1}\}$.

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6 (Aitken).

$$
\begin{aligned}
P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = {} & \frac{x-x_0}{x_n-x_0} P(f|x_1,\ldots,x_n)(x) \\
& + \frac{x_n-x}{x_n-x_0} P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x).
\end{aligned}
$$

- Wir setzen für festes x

$$P_{i,k} := P(f|x_{i-k},\ldots,x_i)(x), \quad 0 \le k \le i \le n,$$

d.h. speziell

$$
\begin{aligned}
P_{n,n} &= P(f|x_0,\ldots,x_n)(x), \\
P_{i,0} &= P(f|x_i)(x) = f(x_i).
\end{aligned}
$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6 (Aitken).

$$P(f|x_0,\ldots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0}P(f|x_1,\ldots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}P(f|x_0,\ldots,x_{n-1})(x).$$

Lemma 8.6 ergibt dann das folgende rekursive Schema:

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= \frac{x-x_{i-k}}{x_i-x_{i-k}}P_{i,k-1} + \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-k}}P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{x-x_i}{x_i-x_{i-k}}(P_{i,k-1}-P_{i-1,k-1}) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Neville-Aitken-Schema

Geg.: x und $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$

Ges.: $P_{n,n} = P_{n,n}(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & P_{i,0} & P_{i,1} & P_{i,2} & \dots & & \\
\hline
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & P_{1,1} & & & & \\
x_2 & f(x_2) & P_{2,1} & P_{2,2} & & & \\
x_3 & f(x_3) & P_{3,1} & P_{3,2} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \\
x_n & f(x_n) & P_{n,1} & P_{n,2} & \dots & \dots & P_{n,n}
\end{array}
$$

Rekursion: $P_{i,k} = P_{i,k-1} + \dfrac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}}(P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1})$

Beachte: $P_{n,n}$ wird bestimmt ohne explizite Darstellung von $P(f|x_0, \dots, x_n)$.

Beispiel 8.7.

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

$$\Longrightarrow P(f \mid 0, 1, 2)(0.5) = 3\tfrac{1}{8}$$

Fragen

Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?
   - Neville-Aitken

2. **Darstellung in geschlossener Form?**
   $\sim$ **Wahl der Basis**
   - Potenzform
   - Lagrange-Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig: Die Lösung in 2., d.h. das Interpolationspolynom, ist immer das gleiche!

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Zur Erinnerung: Mit der monomialen Basis $1, x, \ldots, x^n$ lässt sich das Interpolationspolynom schreiben als

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Die Bedingungen

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,$$

zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_i führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix } V_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Das Gleichungssystem

$$\boldsymbol{V_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

muss also zur Bestimmung der Koeffizienten a_i gelöst werden.

Die Kondition des Problems

$$\begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \to \boldsymbol{V_n^{-1}} \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

wird durch die Konditionszahl $\kappa(\boldsymbol{V_n}) = \|\boldsymbol{V_n}\|\|\boldsymbol{V_n^{-1}}\|$ beschrieben.

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- Die Konditionszahl $\kappa(V_n) = \|V_n\|\|V_n^{-1}\|$ ist oft sehr groß.
  $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.
- Bestimmung der Koeffizienten erfordert Lösung eines $(n+1) \times (n+1)$ linearen Gleichungssystems.

Beispiel 8.10

Sei $h = 1/n$ und $x_i = 1 + ih, i = 0, 1, \dots, n$. Für diese Stützstellenverteilung hat die Vandermonde-Matrix eine Konditionszahl bzgl. der 2-Norm wie folgt:

n	4	6	8	10
$\kappa_2(V_n)$	4.1e+4	2.0e+7	1.1e+10	6.5e+12

Effiziente Methode zur Auswertung der Potenzform

Sei $p \in \Pi_n$ ein Polynom, das in der Potenzform vorliegt, d.h.,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

mit bekannten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. Es gilt

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + x a_n) \ldots)).$$

Algorithmus 8.12 (Horner-Schema).

Setze $b_n = a_n$,

für $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ berechne

$$b_k = a_k + x b_{k+1}$$

Dann ist

$$p(x) = b_0.$$

Rechenaufwand wird etwa halbiert.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

- **Annahme:** Interpolationspolynom $P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt
- **Aufgabe:** Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0, \ldots, x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Idee/Ansatz

Bestimme einen Korrekturterm, durch dessen Ergänzung man $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$ aus $P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ erhält, d.h.

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x) + \delta_n \underbrace{(x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})}_{\in \Pi_n}$$

Beachte: – δ_n ist ein skalarer (fester) Wert.

– δ_n ist der Koeffizient der höchsten Potenz x^n.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.13.

Für die Lagrange-Interpolationspolynomspolynome

$$P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x) \in \Pi_{n-1}$$

und

$$P_n(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) \in \Pi_n$$

gilt

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})$$

mit

$$\delta_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \ldots (x_n - x_{n-1})} \in \mathbb{R}.$$

Da der Koeffizient δ_n von f und von den Stützstellen x_i abhängt, schreibt man auch

$$\delta_n =: [x_0, \ldots, x_n] f.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.14.

$\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]f$ ist offensichtlich der führende Koeffizient des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n.

Wendet man dieselbe Argumentation auf das Interpolationspolynom $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ an, so ergibt sich induktiv die

Newtonsche Interpolationsformel

$$\begin{aligned} P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = & [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f \\ & + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]f + \ldots \\ & + (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})[x_0, \ldots, x_n]f. \end{aligned}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkungen:

- Die Knotenpolynome

$$\begin{aligned} \omega_0(x) &:= 1 \\ \omega_1(x) &:= (x - x_0) \\ &\vdots \\ \omega_n(x) &:= (x - x_0)\dots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

  bilden die Newtonsche Basis von Π_n.

- Für die Koeffizienten erhält man zum Beispiel

$$\delta_0 = [x_0]f = f(x_0)$$

$$\delta_1 = [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

  bzw. verallgemeinert dann ...

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.16.

Seien die Stützstellen x_i paarweise verschieden. Dann gilt

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{[x_1, \ldots, x_n]f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$$

Da $[x_i]f = f(x_i)$ erhält man das rekursive Schema

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & [x_i]f & & [x_i, x_{i+1}]f & & [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f & & [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f \\
\hline
x_0 & [x_0]f & & & & & & \\
 & & > & [x_0, x_1]f & & & & \\
x_1 & [x_1]f & & & > & [x_0, x_1, x_2]f & & \\
 & & > & [x_1, x_2]f & & & > & [x_0, x_1, x_2, x_3]f \\
x_2 & [x_2]f & & & > & [x_1, x_2, x_3]f & & \vdots \\
 & & > & [x_2, x_3]f & & \vdots & & \\
x_3 & [x_3]f & & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

Beispiel 8.18.

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$. Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & f(x_i) & & & & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & & & & \\
 & & > & -0.0995 & & & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & & > & -0.4888 & & \\
 & & > & -0.2950 & & & > & 0.0480 \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & & > & -0.4600 & & \\
 & & > & -0.4790 & & & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\cos x|0)(x) &= 1.000 \\
P(\cos x|0, 0.2)(x) &= 1.000 - 0.0995\, x \\
P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) &= 1.000 - 0.0995\, x - 0.4888\, x\,(x - 0.2)
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.18.

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$. Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & f(x_i) & & & & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & & & & \\
 & & > & -0.0995 & & & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & & > & -0.4888 & & \\
 & & > & -0.2950 & & & > & 0.0480 \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & & > & -0.4600 & & \\
 & & > & -0.4790 & & & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x) \\
&= P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) + 0.0480\, x\,(x-0.2)\,(x-0.4) \\
&= 1.000 - 0.0995\, x - 0.4888\, x\,(x-0.2) \\
&\qquad + 0.0480\, x\,(x-0.2)\,(x-0.4).
\end{aligned}
$$

Satz 8.21

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $[x_0, \ldots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h. hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab (konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

(ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \ldots, x_k]Q = 0$

(iii) Für die Newtonsche Basispolynome ω_k gilt

$$[x_0, \ldots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}, \text{ für } j, k = 0, \ldots, n.$$

(iv) Sei $a := \min_{0 \leq i \leq n} x_i, \; b := \max_{0 \leq i \leq n} x_i,$

$I := [a, b]$ und $f \in C^n(I)$. Dann existiert ein $\xi \in I$, so dass

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Lösungsdarstellung

Die selbe Lösung $P_n = P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ hat unterschiedliche Darstellungen abhängig von der Wahl der Basis in Π_n:

1. Lagrange-Basis
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \cdot \ell_{jn}(x), \quad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$
2. monomiale Basis
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^j, \qquad V_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$
3. Newtonsche Basis
$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} [x_0, \ldots, x_j]f \cdot \omega_j(x), \text{ Knotenpolynome } \omega_j$$
und $[x_0, \ldots, x_n]f = \dfrac{[x_1, \ldots, x_n]f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$.

Zusammenfasung

- Lagrange-Interpolationsaufgabe:
  $P_n \in \Pi_n$, so dass
  $$P_n(x_j) = f(x_j), j = 0, 1, \dots, n$$
  eindeutig lösbar.
- Effiziente Auswertung an einer oder wenigen Stellen x:
  Neville-Aitken-Schema
- Darstellung in geschlossener Form: mehrere Möglichkeiten, abhängig von der Wahl einer Basis in Π_n.
- Für die Numerik günstige Darstellung:
  Newtonsche Interpolationsformel
- Horner-Schema: effiziente Auswerung von
  $$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad (a_0, \dots, a_n \text{ gegeben})$$

Verständnisfragen

Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ und δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms sowie $[x_0, \ldots, x_n]\, f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

☐ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \delta_n(x - x_n) + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ gilt für alle x.

Es seien $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, $f(1) = 4$ und $f(2) = -3$. Berechnen Sie $P(f|x_0, x_1)(1.5)$. $\boxed{0.5}$

Es sei $f(x) = 3x^2 + 2$. Bestimmen Sie $[x_0, x_1, x_2, x_3]\, f$. $\boxed{0}$

☒ Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Dann gilt $a_n = [x_0, \ldots, x_n]\, f$.

Verständnisfragen

Es sei $P(f \,|\, x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \ldots < x_n = b$ und δ_n der führende Koeffizient dieses Polynoms.

- X Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n. Die Knotenpolynome $\omega_0(x) := 1$, $\omega_k(x) := (x - x_0) \ldots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, bilden eine Basis des Raumes Π_n.
- X Die Darstellung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot x^j$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem der Bestimmung der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.
- X Es gilt $P(Q \,|\, x_0, \ldots, x_n) = Q$ für alle Polynome Q vom Grad maximal n.