

Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Interpolation

A. Reusken

K.-H. Brakhage, I. Voulis, H. Saß

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2017

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 8.1-8.3, 10.1

- ▶ Lagrange-Interpolationsaufgabe
- ▶ Fehleranalyse
- ▶ Numerische Differentiation

Kapitel 10: Numerische Integration

- ▶ Einleitung
- ▶ Trapezregel

Was Sie mitnehmen sollten:

- ▶ Fehlerreduktion bei Interpolation:
Erhöhung Polynomgrad oder Stützstellenanzahl?
- ▶ Numerische Differentiation:
Wie macht man das und wie wählt man die Schrittweite?
- ▶ Grundidee der numerischen Integration

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist **stets eindeutig lösbar**, d.h., zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

Insbesondere läßt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten **Lagrange-Fundamentalpolynome** sind.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.14.

$\delta_n = [x_0, \dots, x_n]f$ ist offensichtlich der **führende Koeffizient** des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n .

Wendet man dieselbe Argumentation auf das Interpolationspolynom $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ an, so ergibt sich induktiv die

Newtonsche Interpolationsformel

$$\begin{aligned} P(f|x_0, \dots, x_n)(x) &= [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f \\ &\quad + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]f + \dots \\ &\quad + (x - x_0) \cdots (x - x_{n-1})[x_0, \dots, x_n]f. \end{aligned}$$

Lösungsdarstellung

Die selbe Lösung $P_n = P(f \mid x_0, \dots, x_n)$ hat **unterschiedliche Darstellungen** abhängig von der **Wahl der Basis** in Π_n :

1. Lagrange-Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot \ell_{jn}(x), \quad \ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

2. monomiale Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n a_j \cdot x^j, \quad V_n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

3. Newtonsche Basis

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n [x_0, \dots, x_j] f \cdot \omega_j(x), \quad \text{Knotenpolynome } \omega_j$$

$$\text{und } [x_0, \dots, x_n] f = \frac{[x_1, \dots, x_n] f - [x_0, \dots, x_{n-1}] f}{x_n - x_0}.$$

Satz 8.21

Es gelten folgende Eigenschaften:

- (i) $[x_0, \dots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h. hängt nicht von der Reihenfolge der Stützstellen ab (konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).
- (ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \dots, x_k]Q = 0$
- (iii) Für die Newtonsche Basispolynome ω_k gilt
$$[x_0, \dots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}, \text{ für } j, k = 0, \dots, n.$$
- (iv) Sei $a := \min_{0 \leq i \leq n} x_i$, $b := \max_{0 \leq i \leq n} x_i$,
 $I := [a, b]$ und $f \in C^n(I)$. Dann existiert ein $\xi \in I$, so dass

$$[x_0, \dots, x_n]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Fehleranalyse — Restglieddarstellung

Satz 8.22.

Seien x_0, \dots, x_n paarweise verschiedene Stützstellen, $x \in \mathbb{R}$,

$$a := \min\{x_0, \dots, x_n\},$$

$$b := \max\{x_0, \dots, x_n\} \quad \text{und}$$

$$I := [\min\{a, x\}, \max\{b, x\}].$$

Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$, so dass

$$f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = \left(\prod_{j=0}^n (x - x_j) \right) \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

gilt. Insbesondere gilt

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x)|$$

$$\leq \max_{x \in [a, b]} \left| \prod_{j=0}^n (x - x_j) \right| \cdot \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}.$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ linear interpoliert. Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

- ▶ Mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

erhält man für $\xi \in [0, 1]$

$$f(x) - P(f|0, 1)(x) = -(x-0)(x-1) \frac{1}{2(1+\xi)^2}.$$

- ▶ Da $\max_{x \in [0, 1]} |(x-0)(x-1)| = \frac{1}{4}$ und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, 1)(x)| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$ quadratisch interpoliert. Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

- Mit der Ableitung $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ erhält man für $\xi \in [0, 1]$

$$f(x) - P(f|0, \frac{1}{2}, 1)(x) = (x-0)(x-\frac{1}{2})(x-1) \frac{2}{3!(1+\xi)^3}$$

- Da

$$\max_{x \in [0,1]} |x(x-\frac{1}{2})(x-1)| = \frac{\sqrt{3}}{36},$$

und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, \frac{1}{2}, 1)(x)| \leq \frac{1}{36\sqrt{3}}.$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

Definiere

$$\omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^n (x - x_j) \text{ und } M_{n+1}(f) := \max_{x \in [a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

Dann erhält man für die Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f|x_0, \dots, x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)| M_{n+1}(f)$$

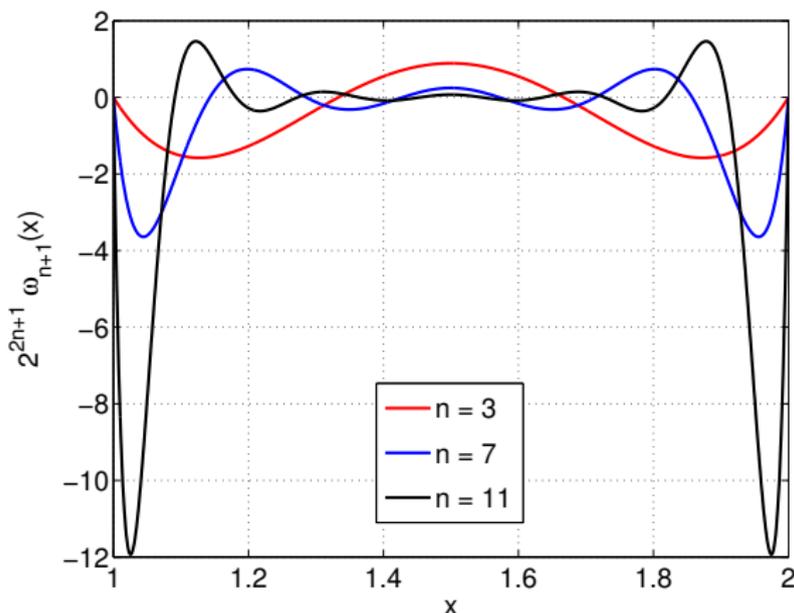
für $x \in [a, b]$ und $x_j \in [a, b], j = 0, 1, 2, \dots, n$.

Beachte

- ▶ $M_{n+1}(f)$ hängt nur von f ab, aber nicht von Stützstellen
- ▶ $\omega_{n+1}(x)$ hängt nur von den Stützstellen ab, aber nicht von f .

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- ▶ Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei **äquidistanten** Stützstellen.
- ▶ Beispiel: $x_j = 1 + \frac{j}{n}$, $j = 0, \dots, n$ für $n = 3, 7, 11$.



Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

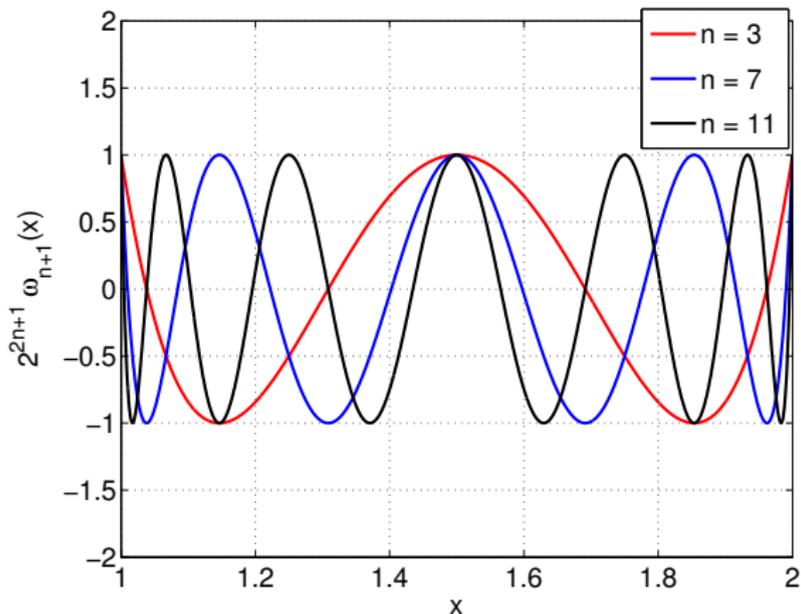
Bemerkung 8.25:

- ▶ Das Verhalten der Funktion ω_{n+1} kann für eine andere Wahl der Stützstellen wesentlich besser sein.
- ▶ Es ist bekannt, dass die Nullstellen der sogenannten **Tschebyscheff-Polynome** wesentlich günstiger Stützstellen liefern.
- ▶ Für diese Nullstellen gibt es explizite Formeln, z.B. für das Intervall $[1, 2]$ hat man die Formeln

$$x_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(\frac{2j+1}{2n+2} \pi \right), \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- ▶ Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei Tschebyscheff-Stützstellen.



Grenzen der Polynominterpolation

Beispiel: Runges Phänomen

- ▶ Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist auf ganz \mathbb{R} beliebig oft differenzierbar.

- ▶ Die Folge der Interpolationspolynome

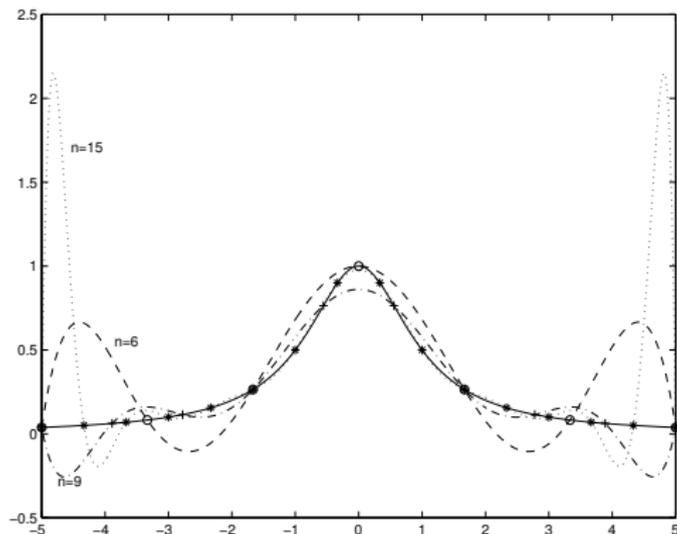
$$P_n(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$$

mit

$$x_j = -5 + 10 \cdot \frac{j}{n}, \quad j = 0, \dots, n,$$

divergiert auf $[-5, 5]$.

Grenzen der Polynominterpolation



Fazit: Als Mittel, über immer mehr Stützstellen immer bessere Approximationen zu gewinnen, taugt die Polynominterpolation im allgemeinen **nicht**.

Fester Polynomgrad

- ▶ Sei $a := \min\{x_0, \dots, x_n\}$
und $b := \max\{x_0, \dots, x_n\}$ mit n fest.
- ▶ Die Länge des Intervalls $h := b - a$ sei veränderbar.
- ▶ Falls $x \in I := [a, b]$ liegt, erhält man sofort die grobe Abschätzung

$$|\omega_{n+1}(x)| \leq h^{n+1},$$

und somit

$$\|f - P(f|x_0, \dots, x_n)\|_{L_\infty(I)} \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \|f^{n+1}\|_{L_\infty(I)}.$$

- ▶ Der Fehler wird kleiner, wenn die Stützstellen gemäß h zusammenrücken.

Dieser Effekt wird in den meisten Anwendungen benutzt.

Matlab-Demo

Beispiel 8.26

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = h$ linear interpoliert. Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler in $[0, h]$ in Abhängigkeit von h .

- ▶ Wir erhalten (siehe Beispiel 8.24)

$$f(x) - P(f|0, h)(x) = -(x-0)(x-h) \frac{1}{2(1+\xi)^2}.$$

- ▶ Da $\max_{x \in [0, h]} |(x-0)(x-h)| = \frac{h^2}{4}$ und $\xi > 0$ folgt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, h)(x)| \leq \frac{h^2}{8}, \quad \text{für } x \in [0, h].$$

- ▶ Der Verfahrensfehler strebt also mit der Ordnung **2** gegen **0**.

Numerische Differentiation

Zur Erinnerung: In der Newton-Interpolationsformel ist

$$\delta_n := [x_0, \dots, x_n]f$$

der Koeffizient der Potenz x^n . Daraus folgt

$$P(f|x_0, \dots, x_n)^{(n)}(x) = n![x_0, \dots, x_n]f \approx f^{(n)}(x).$$

1. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + jh$,

$$f'(x) \approx [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad (x \in [x_0, x_1]),$$

und aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - \frac{1}{2}h$ und $x_1 = x + \frac{1}{2}h$

$$f'(x) = \frac{f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)}{h} - \frac{h^2}{24}f'''(\xi).$$

(zentrale Differenzen)

Numerische Differentiation

2. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + jh$,

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx 2![x_0, x_1, x_2]f \\ &= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \quad (x \in [x_0, x_2]), \end{aligned}$$

und aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - h$, $x_1 = x$ und $x_2 = x + h$ schließlich

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- ▶ Differenzenquotient

$$\Delta_h := \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

- ▶ Fehler in den Daten

$$\tilde{\Delta}_h := \frac{\tilde{f}(x+h) - 2\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-h)}{h^2}.$$

- ▶ Fehler in Δ_h aufgrund Datenfehler ($|f(y) - \tilde{f}(y)| \leq \epsilon$)

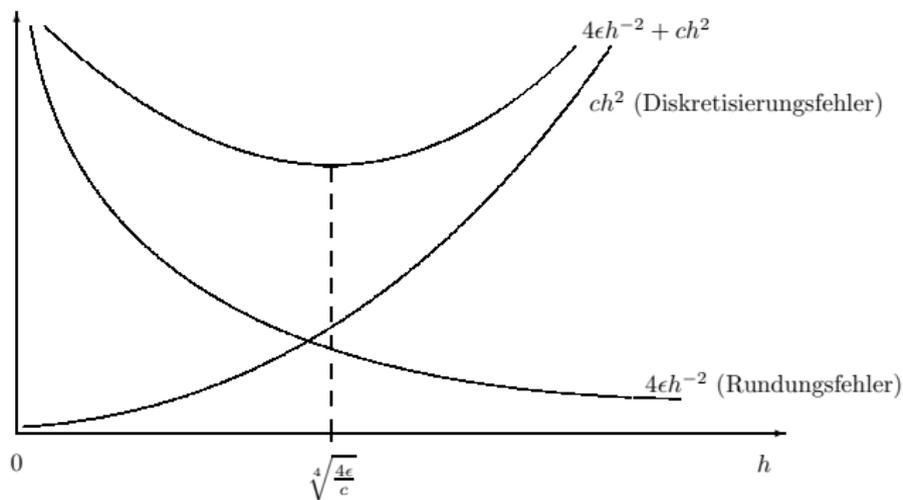
$$\begin{aligned} \left| \Delta_h - \tilde{\Delta}_h \right| &= \frac{1}{h^2} \left| \left(f(x+h) - \tilde{f}(x+h) \right) - 2 \left(f(x) - \tilde{f}(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(f(x-h) - \tilde{f}(x-h) \right) \right| \leq \frac{4\epsilon}{h^2}. \end{aligned}$$

Gesamtfehler

$$\left| \tilde{\Delta}_h - f''(x) \right| \leq \left| \tilde{\Delta}_h - \Delta_h \right| + \left| \Delta_h - f''(x) \right| \leq 4\epsilon h^{-2} + ch^2$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- ▶ Die Schranke wird für $h = \sqrt[4]{4\epsilon/c}$ minimal.
- ▶ Bsp.: $\epsilon = 10^{-9} \Rightarrow h \approx 10^{-2}$, kleineres h vergrößert Fehler



Merke: Man sollte stets dafür sorgen, dass **Rundungsfehler** einen **kleineren Einfluß** haben als **Diskretisierungsfehler**.

Beispiel 8.27.

Aufgabe

Annäherung der zweiten Ableitung von $f(x) = \sin x + 3x^2$ an der Stelle $x = 0.6$ mit dem Differenzquotienten

$$\Delta_h = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

- ▶ Wir rechnen auf einer Maschine mit $\text{eps} \approx 10^{-16}$
- ▶ Man erwartet, dass für $h \approx 10^{-4}$ der Gesamtfehler minimal ist
- ▶ Die Tabelle bestätigt dies:

h	$\tilde{\Delta}_h$	$ \tilde{\Delta}_h - f''(x) $
10^{-2}	<u>5.4353622319</u>	4.71e-06
10^{-3}	<u>5.4353575738</u>	4.72e-08
10^{-4}	<u>5.4353575196</u>	6.98e-09
10^{-5}	<u>5.4353566092</u>	9.17e-07
10^{-6}	<u>5.4352078394</u>	1.50e-04
10^{-7}	<u>5.4400928207</u>	4.74e-03

Zusammenfassung

- ▶ Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f | x_0, \dots, x_n)(x)| \leq |\omega_{n+1}(x)| M_{n+1}(f)$$

$$\text{mit } \omega_{n+1}(x) = \prod_{j=0}^n (x - x_j), \quad M_{n+1}(f) = \max_{x \in [a; b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}$$

- ▶ Sehr hoher Polynomgrad: oft nicht günstig (Runge-Beispiel).
- ▶ Besser: fester Grad + Verkleinerung des Interpolationsintervalls + Wiederholung
- ▶ Numerische Differentiation:

$$f^{(n)}(x) \approx n![x_0, \dots, x_n]f \rightsquigarrow \text{Formeln}$$

- ▶ Wahl von h : Kompromiss zwischen Diskretisierungsfehler und Rundungsfehler (Auslöschung)

Verständnisfragen

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $P(f|x_0, \dots, x_n)$ das Lagrange-Interpolationspolynom vom Grad n , das die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in den Stützstellen $a \leq x_0 < \dots < x_n \leq b$ interpoliert.

- Das Polynom $P(f|x_0, \dots, x_n)$ ist eindeutig.
- Erhöht man sukzessive den Polynomgrad n , so erhält man eine immer genauere Näherung der zu interpolierenden Funktion f in $[a, b]$.
- Die Wahl von äquidistanten Stützstellen ist optimal für die Polynominterpolation

Verständnisfragen

Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} |P(f | x_0, \dots, x_n) - f(x)|$ hängt nicht von der Wahl der Stützstellen ab.

Es gilt

$$\max_{x \in [a,b]} |P(f | x_0, \dots, x_n)(x) - f(x)| \leq \max_{x \in [a,b]} |P(f | x_0, \dots, x_{n-1})(x) - f(x)|$$

Kapitel 10

Numerische Integration

Aufgabe:

$$\int_a^b f(x) dx = ???.$$

Kondition

$$\text{Sei } I = \int_a^b f(x) dx, \quad \tilde{I} = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$$

Es gilt

$$\begin{aligned} |I - \tilde{I}| &= \left| \int_a^b f(x) - \tilde{f}(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)| dx \\ &\leq (b - a) \|f - \tilde{f}\|_\infty. \end{aligned}$$

⇒ absolute Kondition ist gut.

$$\frac{|I - \tilde{I}|}{|I|} \leq (b - a) \frac{\|f - \tilde{f}\|_\infty}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|} = \underbrace{\frac{\int_a^b \|f\|_\infty dx}{\left| \int_a^b f(x) dx \right|}}_{= \kappa_{\text{rel}}} \cdot \frac{\|f - \tilde{f}\|_\infty}{\|f\|_\infty}.$$

⇒ relative Kondition kann beliebig schlecht sein.

Grundlegende Idee

Die gängige Strategie zur näherungsweise Berechnung des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

läßt sich folgendermaßen umreißen:

1. Man unterteile $[a, b]$ in Teilintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ z.B. mit $t_j = a + jh$, $j = 0, \dots, n$, $h = (b - a)/n$.
2. **Approximiere f** auf jedem Intervall $[t_{k-1}, t_k]$ durch eine **einfach zu integrierende Funktion g_k** , und verwende

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x) dx$$

als Näherung für das exakte Integral.

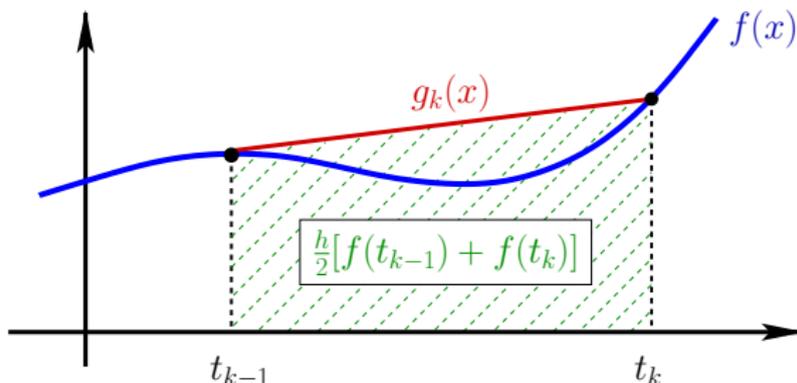
Trapezregel

- ▶ Lineare Interpolation an den Intervallenden von $[t_{k-1}, t_k]$, d.h.

$$g_k(x) = \frac{x - t_{k-1}}{h} f(t_k) + \frac{t_k - x}{h} f(t_{k-1}),$$

- ▶ Das Integral ist damit gegeben durch

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} g_k(x) dx = \frac{h}{2} [f(t_{k-1}) + f(t_k)].$$



Summierte Trapezregel

Wiederholtes Anwenden der Trapezregel auf jedem Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ als Näherung für $\int_a^b f(x) dx$ liefert die

Summierte Trapezregel

$$T(h) = h \left[\frac{1}{2} f(a) + f(t_1) + \dots + f(t_{n-1}) + \frac{1}{2} f(b) \right]$$

Für den Verfahrensfehler der Teilintegrale gilt folgende Darstellung:

Lemma 10.1

Sei $f \in C^2([t_{k-1}, t_k])$. Es gilt:

$$\frac{h}{2} [f(t_{k-1}) + f(t_k)] = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) dx + \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3,$$

für $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

Summierte Trapezregel

Für den Verfahrensfehler des gesamten Integrals $T(h)$ ergibt sich damit die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{f''(\xi_k)}{12} h^3 \right| \\ &\leq \frac{h^3}{12} \sum_{k=1}^n |f''(\xi_k)| \leq \frac{h^3}{12} n \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|. \end{aligned}$$

Mit $n \cdot h = b - a$ ergibt sich insgesamt die

Fehlerschranke

$$\left| T(h) - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{h^2}{12} (b - a) \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|.$$