Numerische Mathematik für Maschinenbauer

Numerische Integration

A. Reusken

K.-H. Brakhage, I. Voulis, H. Saß

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Sommersemester 2017

Heute in der Vorlesung

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 10.5

Numerische Integration

- Wiederholung: Newton-Cotes-Formeln, Gauß-Quadratur
- Zweidimensionale Integrale

Klausuraufgaben: Verständnisfragen

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie werden Integrale und Quadraturformeln transformiert
- Wie werden zweidimensionale Integrale auf ëinfachen"Gebieten approximiert

Allgemeine Quadraturformel

- Für ein typisches Teilintervall $[t_{k-1}, t_k]$ stehe der Einfachheit halber im Folgenden $[c, d]$.
- Seien nun $x_0, \ldots, x_m \in [c, d]$ paarweise verschiedene Punkte.
- Integration des Interpolationspolynoms liefert die Quadraturformel

$$I_m(f) = \int_c^d P(f|x_0, \ldots, x_m)(x)dx.$$

Satz 10.3.

Sei $I_m(f)$ wie oben. Für jedes Polynom $Q \in \Pi_m$ gilt

$$I_m(Q) = \int_c^d Q(x)dx.$$

Man sagt, die Quadraturformel ist exakt vom Grade m.

Allgemeine Quadraturformel

Lemma 10.4

Es gibt Gewichte $c_0, \ldots, c_m$, so dass $I_m(f)$ die Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^{m} c_j f(x_j)$$

hat, wobei wieder $h = d - c$. Die c_j sind durch

$$c_j = \frac{1}{h} \int_c^d \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{m} \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx = \frac{1}{h} \int_c^d \ell_{jm}(x)\, dx$$

gegeben, wobei ℓ_{jm} $(0 \leq j \leq m)$ die Langrange-Fundamentalpolynome zu den Stützstellen $x_0, \ldots, x_m$ sind.

Äquidistante Stützstellen x_j: Newton-Cotes-Formeln

Mann kann die Quadraturformel in der Form

$$I_m(f) = h \sum_{j=0}^{m} c_j f(c + \xi_j h)$$

mit normierten Stützstellen ξ_j und Gewichten c_j schreiben, die jetzt unabhängig vom speziellen Intervall $[c, d]$ sind, z.B.

m		ξ_j	c_j	$I_m(f) - \int_c^d f(x)dx$
0	Mittelpunktsregel	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{24}h^3 f^{(2)}(\xi)$
1	Trapezregel	$0, 1$	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}h^3 f^{(2)}(\xi)$
2	Simpson-Regel	$0, \frac{1}{2}, 1$	$\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}$	$\frac{1}{90}(\frac{1}{2}h)^5 f^{(4)}(\xi)$
3	$\frac{3}{8}$-Regel	$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$	$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$	$\frac{3}{80}(\frac{1}{3}h)^5 f^{(4)}(\xi)$
4	Milne-Regel	$0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$	$\frac{7}{90}, \frac{32}{90}, \frac{12}{90}, \frac{32}{90}, \frac{7}{90}$	$\frac{8}{945}(\frac{1}{4}h)^7 f^{(6)}(\xi)$

Gauß-Quadratur

Zielvorgabe

Entwickle für $m \in \mathbb{N}$ eine Formel

$$\sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i) = \int_c^d P(f|x_0, \ldots, x_m)(x)\, dx$$

mit:

- positiven Gewichten $w_i, i = 0, \ldots, m$;
- mit möglichst hohem Exaktheitsgrad $n \geq m$, d.h.,

$$\int_c^d Q(x)\, dx = \sum_{i=0}^{m} w_i\, Q(x_i), \quad \forall Q \in \Pi_n.$$

Zur Erinnerung: Der Exaktheitsgrad bei Newton-Cotes-Formeln $I_m(f)$ ist entweder m oder $m+1$.

Gauß-Quadratur

- Exaktheitsgrad kann höchstens $2m+1$ sein.

$\Rightarrow$ **Gaußsche Quadraturformeln**

Satz 10.6

Sei $m \geq 0$. Es existieren Stützstellen $x_0, \ldots, x_m \in (c,d)$ und positive Gewichte $w_0, \ldots, w_m$, so dass mit $h = d - c$

$$h \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i) = \int_c^d f(x)\,dx + E_f(h)$$

und

$$E_Q = 0 \quad \text{für alle } Q \in \Pi_{2m+1}.$$

Ferner gilt für passendes $\xi \in [c,d]$

$$|E_f(h)| = \frac{((m+1)!)^4}{((2m+2)!)^3\,(2m+3)} h^{2m+3} |f^{(2m+2)}(\xi)|.$$

Integraltransformation

Eindimensionales Integral

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Sei

$$I_1 = [a,b], \quad I_2 = [c,d] \quad \text{und} \quad \psi : I_1 \to I_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung.
Es gilt die Transformationsformel

$$\int_{I_1} f(\psi(x))|\psi'(x)|\,dx = \int_{I_2} f(y)\,dy.$$

Ein interessanter Spezialfall ergibt sich, falls ψ affin ist, d.h.

$$\widehat{\psi} : [a,b] \to [c,d], \quad \widehat{\psi}(x) = \frac{x-a}{b-a}d + \frac{b-x}{b-a}c\,.$$

Integraltransformation

Wenn

$$Q_m(g; I_1) = (b-a) \sum_{i=0}^{m} w_i g(x_i)$$

eine Formel zur Annäherung von

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

ist, ergibt sich eine entsprechende Formel für das Intervall $I_2 = [c, d]$:

$$\begin{aligned}\int_{I_2} f(y)\,dy &= \int_a^b f(\widehat{\psi}(x))\,|\widehat{\psi}'(x)|\,dx \\ &= \frac{d-c}{b-a} \int_a^b f(\widehat{\psi}(x))\,dx \approx (d-c) \sum_{i=0}^{m} w_i f(\widehat{\psi}(x_i))\end{aligned}$$

Transformation von Quadraturformeln

Also insgesamt:

$$Q_m(g; I_1) = (b-a)\sum_{i=0}^{m} w_i g(x_i)$$

$$Q_m(f; I_2) = (d-c)\sum_{i=0}^{m} \widehat{w}_i f(\hat{x}_i), \quad \text{mit}$$

$$\widehat{w}_i = w_i,\ \hat{x}_i = \frac{x_i - a}{b-a} d + \frac{b - x_i}{b-a} c\ .$$

Beispiel 10.11.

Gauß-Quadraturformeln werden oft für das Intervall $[-1, 1]$ spezifiziert, z.B.

$$I_{[-1,1]}(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\left[\frac{1}{2} f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right)\right]$$

aus Beispiel 10.8.

Die entsprechende Formel für $[c, d]$ und $h := d - c$ lautet:

$$I_{[c,d]}(f) \approx \frac{h}{2}\left[f(c + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h) + f(c + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\right) h)\right]$$

Beispiel 10.11.

Analog kann man für die Gauß-Quadratur mit 4 Stützstellen

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx 2\sum_{i=0}^{3} w_i f(x_i),$$

mit

$$\begin{aligned} w_0 = w_3 &= 0.173928, \\ w_1 = w_2 &= \frac{1}{2} - w_0, \\ -x_0 = x_3 &= 0.861136, \\ -x_1 = x_2 &= 0.339981, \end{aligned}$$

eine Formel für ein beliebiges Intervall $[c, d]$ herleiten.

Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Wir betrachten nun die Transformation eines zweidimensionalen Integrals

$$\int_B f(x,y)\,dx\,dy, \quad B \subset \mathbb{R}^2.$$

Sei

$$B_1, B_2 \subset \mathbb{R}^2$$

und

$$\psi : B_1 \to B_2$$

eine stetig differenzierbare bijektive Abbildung mit Jacobi-Matrix

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \psi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \psi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}.$$

Transformation eines zweidimensionalen Integrals

Es gilt folgende Transformationsformel:

Satz 10.12.

Falls $\det J(x,y) \neq 0$ für alle $(x,y) \in B_1$, so gilt

$$\int_{B_1} f(\psi(x,y)) |\det J(x,y)| \, dx \, dy = \int_{B_2} f(\tilde{x},\tilde{y}) \, d\tilde{x} \, d\tilde{y}.$$

Für den Spezialfall, dass ψ affin ist,

$$\psi(x,y) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad A \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \det(A) \neq 0, \quad b \in \mathbb{R}^2,$$

ergibt sich:

$$|\det A| \int_{B_1} f\left(A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b\right) \, dx \, dy = \int_{B_2} f(\tilde{x},\tilde{y}) \, d\tilde{x} \, d\tilde{y}.$$

Zweidimensionales Integral

Mit Hilfe dieser Transformationsformel kann man, wie im eindimensionalen Fall, eine Quadraturformel für einen Standardbereich (z.B. Einheitsquadrat, Einheitsdreieck) in eine Formel für einen affin-äquivalenten Bereich überführen.

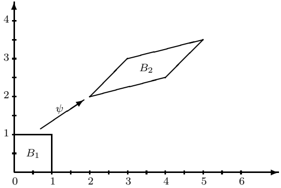
Wichtiger Unterschied zwischen ein- und mehrdimensionaler Integration:

Zwei Intervalle $[a, b]$ und $[c, d]$ lassen sich stets durch affine Transformationen aufeinander abbilden.

Hingegen ist es meistens nicht möglich, einfache Gebiete in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, durch eine affine Transformation ineinander zu überführen.

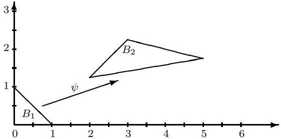
Beispiel 10.14. (Affine Transformationen)

Sei $B_1 = [0,1] \times [0,1]$ das Einheitsquadrat.
Jede affine Abbildung bildet B_1 auf ein Parallelogramm ab.



Eine affine Abbildung von B_1 auf den Einheitskreis $S = \{(x,y) | \, (x^2 + y^2) \le 1\}$ ist also nicht möglich.

Für das Einheitsdreieck gilt: jede affine Abbildung bildet es auf ein Dreieck ab.



Integration über dem Einheitsquadrat

Gesucht ist eine numerische Näherung für

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy.$$

Sei

$$F(y) := \int_0^1 f(x,y)\,dx,$$

und

$$Q_m(g) = \sum_{i=0}^{m} w_i g(x_i) \approx \int_0^1 g(x)\,dx$$

eine Quadraturformel für dieses eindimensionale Integral.

Integration über dem Einheitsquadrat

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy &= \int_0^1 F(y)\,dy \\
&\approx \sum_{j=0}^{m} w_j F(x_j) \\
&= \sum_{j=0}^{m} w_j \int_0^1 f(x,x_j)\,dx \\
&\approx \sum_{j=0}^{m} w_j \sum_{i=0}^{m} w_i f(x_i,x_j) \\
&= \sum_{i,j=0}^{m} w_i w_j\, f(x_i,x_j) =: Q_m^{(2)}(f).
\end{aligned}$$

Beispiel 10.17.

Sei

$$Q_1(g) = \frac{1}{2}g(x_0) + \frac{1}{2}g(x_1), \quad x_0 := \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad x_1 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6},$$

die eindimensionale Gauß-Quadraturformel mit zwei Stützstellen für das Intervall $[-1, 1]$.

Daraus ergibt sich die Produktregel

$$Q_1^{(2)}(f) = \frac{1}{4}\Big(f(x_0, x_0) + f(x_0, x_1) + f(x_1, x_0) + f(x_1, x_1)\Big)$$

für den Bereich $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

Diese Formel ist exakt für alle Linearkombinationen von Polynomen $x^{k_1}y^{k_2}$, $0 \leq k_1, k_2 \leq 3$.

Integration über dem Einheitsdreieck

Für Dreiecke ist es zweckmäßig, von den Monomen

$$1, x, y, x^2, xy, y^2, \quad \text{usw.}$$

auszugehen und die Frage nach solchen Quadraturformeln zu stellen, die alle Monome der Form $x^{k_1}y^{k_2}$, $0 \leq k_1 + k_2 \leq M$ exakt integrieren.

Einige typische Beispiele:

$$\text{(i)} \quad Q(f) = \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\text{(ii)} \quad Q(f) = \frac{1}{6}[f(0,0) + f(1,0) + f(0,1)]$$

$$\textbf{(iii)}\quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{2},0\right) + f\left(0,\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\textbf{(iv)}\quad Q(f) = \frac{1}{6}\left[f\left(\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6}\right) + f\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3}\right)\right].$$

Die Monome $1, x, y$ werden durch die Formeln in (i), (ii) exakt integriert.

Die Monome $1, x, y, xy, x^2, y^2$ werden durch die Formeln in (iii), (iv) exakt integriert.

Verständnisfragen VF-1

Es seien x_{MIN} bzw. x_{MAX} die kleinste bzw. größte (strikt) positive Zahl sowie eps die relative Maschinengenauigkeit in der Menge $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ der Maschinenzahlen gemäß Vorlesung/Buch und $\mathbb{D} := [-x_{\mathrm{MAX}}, -x_{\mathrm{MIN}}] \cup [x_{\mathrm{MIN}}, x_{\mathrm{MAX}}]$.
Ferner beschreibe $\mathrm{fl} : \mathbb{D} \to \mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Standardrundung, und es sei $\ominus$ (gem. Vorlesung/Buch) der Minusoperator für $\mathbb{M}$, d.h.: $x \ominus y := fl(fl(x) - fl(y))$ wobei wir hier annehmen, dass alle Zwischenergebnisse in $\mathbb{D}$ liegen.
Alle Zahlen sind im Dezimalsystem angegeben.

- [ ] Für jedes $x \in \mathbb{D}$ existiert eine Zahl ϵ mit $|\epsilon| \le \mathrm{eps}$ und $\mathrm{fl}(x) = x + \epsilon$.
- [ ] Es existiert ein $x \in \mathbb{D}$, so dass $\frac{|\mathrm{fl}(x) - x|}{|x|} = \mathrm{eps}$.
- [x] Die Zahl $\mathbf{31}$ ist in $\mathbb{M}(2, 6, -8, 8)$ exakt darstellbar.

- [X] Es gilt $\frac{|(x \ominus y)-(x-y)|}{|x-y|} \leq \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{M}(b, m, r, R)$ mit $x \neq y$.

Berechnen Sie x_{MAX} für $\mathbb{M}(3, 2, -1, 3)$. 24

- [ ] Es gilt $\frac{|(x \ominus y)-(x-y)|}{|x-y|} \leq \text{eps}$ für alle $x, y \in \mathbb{D}$ mit $x \neq y$.

- [ ] Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.

- [ ] Die Subtraktion zweier Zahlen mit demselben Vorzeichen ist immer schlecht konditioniert.

- [X] Die Funktion $f(x_1, x_2) = x_2 e^{x_1}$ ist für alle (x_1, x_2) mit $|x_1| \leq 1$ gut konditioniert.

Es sei $f(x) = 1/(1+x)$ und $\tilde{x}$ ein Näherungswert für $x = 3$, der mit einem relativen Fehler von maximal 2% behaftet ist. Bestimmen Sie in erster Näherung eine (scharfe) Schranke für den relativen Fehler in $f(\tilde{x})$ als Annäherung für $f(x)$. 0.015

Verständnisfragen VF-2

Es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

- [ ] Es sei $\tilde{\boldsymbol{x}}$ eine Annäherung der Lösung $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$ das zugehörige Residuum.
  Es gilt $\|\boldsymbol{r}\| \leq \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|$, mit $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}) := \|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$.
- [ ] Es existiert stets eine untere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ und eine obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$, so dass $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R}$ gilt.
- [x] Falls $\boldsymbol{A}$ orthogonal ist, gilt $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$.
- [x] Es sei $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beliebig aber regulär und $\boldsymbol{\kappa}(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. $\|\cdot\|$. Es gilt $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}) \leq \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{B})$.

Es sei $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}$ die zeilenäquilibrierte Matrix zu $\boldsymbol{A}$. Geben Sie $\|\boldsymbol{B}\|_\infty$ an. $\boxed{1}$

- [ ] Für die Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$ existiert eine Cholesky-Zerlegung.

Verständnisfragen VF-2

Es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$ und gesucht sei die Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

☐ Der Rechenaufwand zur Bestimmung der Lösung $\boldsymbol{x}$ über die Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt etwa $\frac{1}{6}n^3$ Operationen (gem. Vorlesung/Buch).

☐ Pivotisierung verbessert die Kondition der Gauß-Elimination.

☒ Es sei $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ die über den Gauß-Algorithmus mit Spaltenpivotisierung berechnete Faktorisierung. Dann gilt:

$$|\det(\boldsymbol{A}^{-1})| = \frac{1}{|\det(\boldsymbol{R})|}$$

.

Es sei $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\|\boldsymbol{A}\|_1$. $\boxed{8}$

Verständnisfragen VF-3

Es seien A eine symmetrisch positiv definite $n \times n$-Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A = L\,D\,L^T$ die Cholesky-Zerlegung von A.

- [ ] Es gilt $\|A\|_2 = \|D\|_2$.
- [ ] Das Problem $Ax = b$ ist immer gut konditioniert.
- [x] Das Cholesky-Vefahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung ist ein stabiles Verfahren.
- [ ] Für die stabile Berechnung einer $L\,R$-Zerlegung $A = L\,R$ von A ist Pivotisierung notwendig.

Es sei Q eine orthogonale Matrix und $Q \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$.

Geben Sie $|c|$ an. $\boxed{13}$

- [ ] Es gilt $A^{-1} = LD^{-1}L^T$.

Verständnisfragen VF-3

- [X] Das Produkt zweier Givens-Rotations-Matrizen ist eine orthogonale Matrix.
- [ ] Es seien $\boldsymbol{Q_v} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine Householder-Transformations-Matrix und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m}$ beliebig.

  Es gilt $\|\boldsymbol{Q_v x}\|_\infty = \|\boldsymbol{x}\|_\infty$.
- [ ] Die Berechnung einer $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}$ von $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ über Householder-Transformationen ist nur dann stabil, wenn die Matrix $\boldsymbol{B}$ vollen Spaltenrang hat.

Es sei $\boldsymbol{Q_v}$ eine Householder-Transformation. Geben Sie den Wert des größten Eigenwertes der Matrix $\boldsymbol{Q_v}$ an. $\boxed{1}$

Verständnisfragen VF-4

Es seien $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $\mathbf{Rang}(\boldsymbol{A}) = n < m$, und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ eine orthogonale Matrix und $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{R}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ gilt, mit $\tilde{\boldsymbol{R}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Es sei $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2$.
Weiter sei $\boldsymbol{\Theta} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^*$ und $\boldsymbol{b}$.

- [X] Je kleiner der Winkel $\boldsymbol{\Theta}$, desto kleiner ist die Größe $\frac{\|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\|_2}{\|\boldsymbol{b}\|_2}$.
- [ ] Es gilt $\tilde{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{Q}^T\,\boldsymbol{b}$.
- [X] Die Matrix $\tilde{\boldsymbol{R}}$ kann man über Givens-Rotationen bestimmen.
- [ ] Es gilt $\det(\tilde{\boldsymbol{R}}) = \det(\boldsymbol{A})$.

Es seien $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{4}$, $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{3}$ und $\boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{1} \\ \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{3} \\ \boldsymbol{-4} \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $\|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\|_2$. $\boxed{4}$

- [X] Es gilt $\|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|_2 = \|\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} - \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{b}\|_2$ für beliebiges $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
- [ ] Durch eine geeignete Wahl des skalaren Parameters im Levenberg-Marquardt-Verfahren zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems wird die Konvergenzordnung der Methode in der Regel erhöht.
- [X] Die Gauß-Newton-Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems kann man als Fixpunktiteration darstellen.
- [ ] Die Konvergenzordnung der Gauß-Newton-Methode zur Lösung eines nichtlinearen Ausgleichsproblems ist immer maximal 1.

Es sei $\boldsymbol{\Theta} = \boldsymbol{0}$. Bestimmen Sie $\|\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^* - \boldsymbol{b}\|_2$. $\boxed{0}$

Verständnisfragen VF-5

Es seien $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k),\ k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert.
Weiter sei $\Phi'(x)$ die Ableitung von Φ an der Stelle x.
Für $n = 1$ sei außerdem $\Phi_1(x) := \frac{1}{4}x^2 - 1$.

- [ ] Es gilt $\|\Phi'(x^*)\| < 1$.
- [ ] Die Konvergenzordung der Fixpunktiteration ist maximal 2.
- [ ] Das Fixpunktproblem $\Phi_1(x)=x$ hat eine eindeutige Lösung x^*in $\mathbb{R}$.
- [X] Für Φ_1 sind auf dem Intervall $[-1, 0]$ alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Wir betrachten die Fixpunktiteration zur Bestimmung einer Lösung $x^* < 0$ des Fixpunktproblems $\Phi_1(x) = x$, mit einem Startwert x_0 aus einer hinreichend kleinen Umgebung von x^*. Geben Sie die Konvergenzordnung dieser Methode an. $\boxed{1}$

Verständnisfragen VF-5

- ☐ Bei der Sekantenmethode zur Bestimmung einer Nullstelle einer skalaren Funktion f, müssen die Startwerte x_0, x_1 so gewählt werden dass $f(x_0)f(x_1) < 0$ gilt.
- ☒ Es sei $f(x) = x^2 - 3$. Das auf f angewandte Newton-Verfahren konvergiert für jeden Startwert $x_0 > 0$ gegen die Nullstelle $x^* > 0$ dieser Funktion.
- ☐ Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Vefahren zur Bestimmung einer Nullstelle kann man nur bei skalarwertigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ anwenden.

Verständnisfragen VF-5

☐ Es seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) \neq 0$. Weiter sei x_0 so gewählt, dass die Newton-Methode $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ mit Startwert x_0 gegen x^* konvergiert. Dann gilt: $|x^* - x_k| \approx (x_{k+1} - x_k)^2$ für k hinreichend groß.

Es seien $n = 1$ und $\Phi(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$. Wir betrachten das Fixpunktproblem auf dem Intervall $[0, 1]$. Geben Sie eine scharfe obere Schranke für die Lipschitzkonstante $L < 1$ aus dem Banachschen Fixpunktsatz an. $\boxed{0.5}$

Verständnisfragen VF-6

Es sei $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)$ das Lagrange–Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0)), \ldots, (x_n, f(x_n))$ mit $a = x_0 < \cdot < x_n = b$. Weiter sei $[x_0, \ldots, x_n]f$ die dividierte Differenz der Ordnung n von f.

- [ ] Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = (x - x_n)[x_0, \ldots, x_n]f + P(f \mid x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$.
- [X] Es sei Π_n der Raum aller reellen Polynome vom Grad maximal n. Die Knotenpolynome $\omega_k(x) := (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$, $k = 1, \ldots, n$, $\omega_0(x) := 1$, bilden eine Basis des Raumes Π_n.
- [X] Die Auswertung des Interpolationspolynoms in der monomialen Basis $P(f \mid x_0, \ldots, x_n)(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist für numerische Zwecke ungünstig, weil das Problem (Auswertung) bezüglich der Koeffizienten a_k oft schlecht konditioniert ist.
- [X] Der Fehler $\max_{x \in [a,b]} |P(f \mid x_0, \ldots, x_n) - f(x)|$ hängt von der Wahl der Stützstellen ab.

Es sei $f(x) = 3x^2 + 2$. Bestimmen Sie $[x_0, x_1, x_2, x_3]f$. $\boxed{0}$

Verständnisfragen VF-6

Es sei $f \in C[a,b]$. Das Integral $I(f) = \int_a^b f(x)\,dx$ soll numerisch approximiert werden durch eine Quadraturformel $I_m(f) = (b-a)\sum_{j=0}^m w_j f(x_j)$ mit $a \leq x_0 < \ldots < x_m \leq b$. Weiter sei $I_{m,n}(f)$ die aus $I_m(f)$ konstruierte summierte Quadraturformel auf den Teilintervallen $[t_{j-1}, t_j]$, $j = 1, \ldots, n$, mit $t_j = a + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $h = (b-a)/n$.

- [X] Es sei $I_2(f)$ die Simpson-Regel. Dann gilt $|I_{2,n}(f) - I(f)| \to 0$ für $n \to \infty$.
- [X] Es gilt $I_m(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal m.
- [ ] Es gilt $I_{1,n}(p) = I(p)$ für alle Polynome p vom Grad maximal n.
- [ ] Bei den Newton-Cotes-Formeln hängen die Gewichte w_j von dem Interval $[a,b]$ ab.

Berechnen Sie eine Approximation von $\int_0^2 x^5\,dx$ mit Hilfe der summierten Trapezregel $I_{1,2}(f)$. $\boxed{17}$