Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
Verständnisfragen – Hausübung 3

VF-1:		
1.	Je besser die Kondition eines Problems, desto stabiler sind Algorithmen zur Lösung dieses Problems.	
2.	Bei einem stabilen Algorithmus ist der Ausgabefehler nicht viel größer als der Eingabefehler.	
3.	Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ ist gut konditioniert für alle x mit $\lvert x - 1 \rvert \ll 1$.	
4.	Die Funktion $f(x, y) = x\, e^{4\, y^2}$ ist gut konditioniert für alle (x, y) mit $y \in [-0.4, 0.4]$.	
5.	Berechne die relative Konditionszahl der Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^4\, x_2^2$ für $(x_1, x_2) = (e, \pi)$.	

VF-2:		
1.	Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi \cdot 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $(x + y)(x - y)$ in $\mathbb{M}(10, 12, -99, 99)$ tritt Auslöschung auf.	
2.	Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi \cdot 10^{-10}$. Bei der Berechnung von $\sin(x) - \sin(y)$ in $\mathbb{M}(10, 12, -99, 99)$ tritt Auslöschung auf.	
3.	Die Funktion $f(x, y) = x + y$ ist für alle (x, y) mit $(x, y) \neq (0, 0)$ gut konditioniert.	
4.	Es seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Dann gilt $\kappa(A^{-1}) = \kappa(A)^{-1}$.	
5.	Es seien $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{1}{3} + \pi\, 10^{-10}$. Berechne $\sin(x) - \sin(y)$ in $\mathbb{M}(10, 7, -99, 99)$.	

VF-3: Gegeben seien eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für das zugehörige lineare Gleichungssystem $A\, x = b$: Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Das Problem ist immer gut konditioniert.	
2.	Bei Störung der Eingabedaten A und b wird der relative Fehler in der Lösung in Abhängigkeit vom relativen Eingabefehler maximal durch den Faktor $\kappa(A)$ verstärkt.	
3.	Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann immer mit dem Standard-Gauß-Algorithmus (ohne Spaltenpivotisierung) berechnet werden.	
4.	Es sei B die zu A gehörige zeilenäquilibrierte Matrix. Dann gilt $\kappa_2(B) \leq \kappa_2(A)$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -2.34 & 14.4 \\ 5.67 & 6.78 \end{pmatrix}$ und B die zu A gehörige zeilenäquilibrierte Matrix. Berechne $\lVert B \rVert_\infty$.	

VF-4: Gegeben seien die Matrizen A und $\tilde{A}$ mit $\tilde{A} \approx A = \begin{pmatrix} 123 & 0.12 \\ 1.23 & 12.3 \end{pmatrix}$. Alle Zahlen in A sind auf drei signifikante Ziffer gerundet. ΔA sei das größtmögliche Abweichung für $A - \tilde{A}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	$\|\Delta A\|_1 = 0.505$	
2.	$\|\Delta A\|_\infty = 0.505$	
3.	Für den relativen Fehler von A gemessen in der 1-Norm gilt $r_{A1} \approx 0.004$	
4.	Berechne $\|A\|_1$.	
5.	Berechne $\|A\|_\infty$.	

VF-5: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & 14 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	A ist regulär.	
2.	$\det(A) = 0$.	
3.	$\|A\|_\infty = 12$	
4.	Für eine beliebige rechte Seite $b \in \mathbb{R}^2$ besitzt $A\,x = b$ eine eindeutige Lösung x.	
5.	Berechne $\|A\|_1$.	

VF-6: Seien A, B beliebige $n \times n$-Matrizen mit reellen Einträgen. Weiter sei $\|.\|$ eine Matrixnorm. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch.		
1.	$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.	
2.	$\|A - B\| \leq \|A\| - \|B\|$.	
3.	$\|\lambda A + \mu B\| \leq \lambda\|A\| + \mu\|B\|, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.	
4.	$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.	
5.	Es sei $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{pmatrix}$. Berechne $\det\left(A^4\right)$.	