

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18

Verständnisfragen – Übung 3

VF-1: Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig.	
1.	$\ A\ _\infty = \ A^T\ _1$
2.	Falls A invertierbar ist, gilt $\ AA^{-1}\ = \ A\ \ A^{-1}\ $.
3.	$\kappa(A) = 1 \Rightarrow A = I$
4.	$\kappa(A) = \ A\ \ A^T\ $
5.	Es sei $A = \begin{pmatrix} \cos(0.5) & \sin(0.5) \\ -\sin(0.5) & \cos(0.5) \end{pmatrix}$. Berechne $\ A\ _2$.

VF-2: Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det(A) \neq 0$ und $a, b, \Delta b, x, \Delta x \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$ sei x die Lösung von $Ax = b$ und $x + \Delta x$ die Lösung von $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Es sei $\ \cdot\ $ eine Vektornorm auf \mathbb{R}^n bzw. die zugehörige Matrix-Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$.	
1.	$\frac{\ \Delta b\ }{\ b\ } \leq \ A\ \cdot \ A^{-1}\ \frac{\ \Delta x\ }{\ x\ }$
2.	$\frac{\ \Delta x\ }{\ x\ } \leq \ A\ \cdot \ A^{-1}\ \frac{\ \Delta b\ }{\ b\ }$
3.	$\frac{\ \Delta x\ }{\ x\ } \leq \ A\ \cdot \ A\ ^{-1} \frac{\ \Delta b\ }{\ b\ }$
4.	$\ \Delta x\ \leq \ A^{-1}\ \ \Delta b\ $
5.	Es sei $A = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Berechne $\kappa_2(A)$.

VF-3: Mit $b, \tilde{b}, x, \tilde{x} \in \mathbb{R}^n$ und $A, \tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sowie $Ax = b$ und $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ seien $r_b := \frac{\ \tilde{b}-b\ }{\ b\ }$, $r_x := \frac{\ \tilde{x}-x\ }{\ x\ }$ und $r_A := \frac{\ \tilde{A}-A\ }{\ A\ }$ die relativen Fehler der rechten Seite, der Lösung und der Matrix, und es gelten die Definitionen $\kappa_A := \ A\ \cdot \ A^{-1}\ $ sowie $h := \ \tilde{A} - A\ \cdot \ A^{-1}\ $. Hierbei sei $\ \cdot\ $ eine Vektornorm auf \mathbb{R}^n bzw. die zugehörige Matrix-Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$, und es sei $\ b\ , \det(A) \neq 0$ vorausgesetzt.	
1.	Es gilt stets $r_x \leq \kappa_A \frac{r_A + r_b}{1-h}$.
2.	$r_x \leq \kappa_A \frac{r_A + r_b}{1-h}$ gilt stets, wenn $h < 1$ gilt.
3.	$\ \tilde{x} - x\ \leq \ A\ ^{-1} \cdot \ \tilde{b} - b\ $ gilt stets, wenn $h = 0$ gilt.
4.	$\ \tilde{x} - x\ \leq \ A^{-1}\ \cdot \ \tilde{b} - b\ $ gilt stets, wenn $h = 0$ gilt.
5.	Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ beliebig aber regulär und $\kappa(\cdot)$ die Konditionszahl bzgl. $\ \cdot\ $. Es gilt $\kappa(AB) \leq \kappa(A)\kappa(B)$.
6.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ und b ungestört. Gib die bestmögliche Schranke für r_x an.