Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
Verständnisfragen – Hausübung 4

VF-1: Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Das Produkt von unteren Dreiecksmatrizen ist wieder eine untere Dreiecksmatrix.	
2.	Die Inverse einer oberen nichtsingulären Dreiecksmatrix ist eine untere Dreiecksmatrix.	
3.	Die Inverse einer unteren nichtsingulären Dreiecksmatrix ist nicht immer eine Dreiecksmatrix.	
4.	Das Produkt von zwei regulären Matrizen ist wieder regulär.	
5.	Es seien $A = QR$, wobei Q eine orthogonale Matrix ist, und $R = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Berechne $\kappa_2(A)$.	

VF-2: Es seien A eine reguläre Matrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine obere Dreiecksmatrix im $R^{n\times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Es existiert immer eine Zerlegung $A = L\,R$.	
2.	Die Determinante von A ist ungleich 0.	
3.	Wenn $A = L\,R$ ist, dann ist die Determinante von A das Produkt der Diagonaleinträge von R. ($\det(A) = \prod_{i=1}^{n} r_{ii}$)	
4.	Das homogene System $A\,x = 0$ besitzt nur die triviale Lösung $x = 0$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1.7 & -2.1 & 1.2 \\ -1.5 & 1.1 & 1.4 \\ 2.2 & 1.3 & -1.5 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechne $\det(D)$.	

VF-3: Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $A\,x = b$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!		
1.	Durch Pivotisierung kann die Stabilität der LR-Zerlegung verbessert werden.	
2.	Pivotisierung verbessert die Kondition des linearen Gleichungssystems.	
3.	Zeilenäquilibrierte Matrizen sind immer gut konditioniert.	
4.	Es sei $\kappa(A)$ die Konditionszahl der Matrix A. Bei Störung der Eingabedaten A und b ist der relative Fehler in der Lösung maximal um einen Faktor $\kappa(A)$ größer als der relative Eingabefehler.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -10.5 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$ und b ungestört. Gib die bestmögliche Schranke für r_x an.	

VF-4: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Abkürzung "SPD" stehe für symmetrisch und positiv–definit.		
1.	A SPD $\Longrightarrow A$ ist invertierbar	
2.	A SPD $\Longleftrightarrow A^{-1}$ SPD	
3.	A SPD $\Longrightarrow A$ hat nur positive Eigenwerte	
4.	A symmetrisch mit $A > .0$ (komponentenweise) $\Longrightarrow A$ ist SPD	
5.	Zur Lösung eines Gleichungssystems mit einer SPD–Matrix kann man bei der Gauß–Elimination auf die Spaltenpivotisierung verzichten.	
6.	A ist eine SPD–Matrix genau dann, wenn A eine Cholesky–Zerlegung besitzt, und alle Diagonalelemente des Cholesky–Faktors R ($A = R^T R$) positiv sind.	