Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
Verständnisfragen – Übung 4

VF-1: Es seien $A \in R^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$ und gesucht sei die Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ von $Ax = b$.		
1.	Der Aufwand für das Rückwärtseinsetzen ist etwa $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.	
2.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $\lvert\lvert x - \tilde{x}\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert b\rvert\rvert \leq \kappa(A) \cdot \lvert\lvert x\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert \tilde{r}\rvert\rvert$	
3.	$\kappa_2(A) > 0$	
4.	Es seien $\tilde{x}$ eine Annäherung an x und $\tilde{r} = b - A\tilde{x}$ das zugehörige Residuum. Dann gilt: $\lvert\lvert x - \tilde{x}\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert b\rvert\rvert \leq \kappa(A^{-1}) \cdot \lvert\lvert x\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert \tilde{r}\rvert\rvert$.	
5.	Der Rechenaufwand für die $L - R$-Zerlegung mit Pivotisierung beträgt etwa $a\,n^p$ Operationen (Operationen gem. Vorlesung). Gib a an.	

VF-2: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.		
1.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung von A mit $A = L\,R$.	
2.	Ist $\det(A) \neq 0$, so existiert stets eine normierte untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix R, so dass $A = LR$.	
3.	Es seien P eine Permutationsmatrix, L eine normierte untere Dreiecksmatrix und R eine oberere Dreiecksmatrix, so dass $PA = LR$. Dann gilt $\lvert\det(A)\rvert = \lvert\det(R)\rvert$.	
4.	$\lvert\lvert A\rvert\rvert_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left\lvert a_{ji}\right\rvert$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1.2 & 1.2 & 1.6 \\ 1.5 & 1.1 & 1.4 \\ 19 & 2.9 & 3.1 \end{pmatrix}$ und D die zugehörige Diagonalmatrix der Zeilenskalierung. Berechne $\det(D)$.	

VF-3: Gegeben sei eine nichtsinguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.		
1.	Es existiert immer eine LR-Zerlegung von A mit $A = L\,R$.	
2.	Der Rechenaufwand zur Berechnung der LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung beträgt $\frac{1}{6}\,n^3$ Operationen.	
3.	Die Inverse von A kann mittels LR-Zerlegung mit Pivotisierung in $\frac{4}{3}\,n^3$ Operationen berechnet werden.	
4.	Falls alle Diagonaleinträge von A positiv sind, existiert immer eine Zerlegung $A = L\,R$ von A.	
5.	Sei $A = L\,R$ mit $R = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimme $\det(A)$.	