Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
Verständnisfragen – Hausübung 5

VF-1: Es seien $\|.\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$ und $\|.\|$ die zugehörige Matrix–Norm. Weiter seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	$\|A^k\| \leq \|A\|^k$	
2.	Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\quad \|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A\|}$	
3.	Es sei A zusätzlich invertierbar. Dann gilt $\quad \|A^{-1}\| = \frac{1}{\inf_{\|x\|=1} \|A\,x\|}$	
4.	$\forall x \in \mathbb{R}^n \; : \; \|A\,x\| = \|A\|\,\|x\|$	
5.	$\|A\,B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix, $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $d_{i,i} > 0,\ i = 1, \ldots, n$.		
1.	Falls eine Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ existiert, dann ist A symmetrisch positiv definit.	
2.	Für jede invertierbare Matrix A existiert eine Zerlegung $A = L\,D\,L^T$.	
3.	Für jede symmetrische Matrix A existiert eine Zerlegung $A = L\,D\,L^T$.	
4.	Die Matrix $L\,D\,L^T$ ist invertierbar.	
5.	Es seien $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $A = L\,D\,L^T$. Berechne $\det(A)$.	

VF-3: Es seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Diagonalmatrix.		
1.	Das Cholesky-Verfahren zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ ist nur dann stabil, wenn man Pivotisierung benutzt.	
2.	Der Aufwand des Cholesky-Verfahrens zur Bestimmung der Cholesky-Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ ist ca. $\frac{1}{3}n^3$ Operationen.	
3.	Es sei $A = L\,D\,L^T$. Dann gilt $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} d_{i,i}$, wobei $d_{i,i}$ die Diagonaleinträge der Matrix D sind.	
4.	Es sei $A = L\,D\,L^T$. Dann gilt $\kappa_2(A) = \kappa_2(D)$, wobei $\kappa_2(.)$ die Konditionszahl bezüglich der euklidischen Norm ist.	
5.	Bei bekannter Zerlegung $A = L\,D\,L^T$ beträgt der Aufwand zum Lösen von $A\,x = b$ ungefähr $\alpha\,n^p$. Gib p an.	

VF-4: Es sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und κ_2 bezeichne die Kondition bzgl. der $\|.\|_2$-Norm.		
1.	$Q^T\,Q = Q\,Q^T = I$.	
2.	$\lvert\det(Q)\rvert = \|Q\|_2 = \|Q^T\|_2 = \|Q^{-1}\|_2 = \kappa_2(Q) = \kappa_2(Q^T) = \kappa_2(Q^{-1}) = 1$.	
3.	$\|Q\,x\|_2 = \|x\|_2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m$.	
4.	$\|Q\,A\|_2 = \|A\|_2 \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.	
5.	$\kappa_2(QA) = \kappa_2(A\,Q) = \kappa_2(A) \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{m\times m}$.	
6.	Es seien $m = 2$ und $x = (3,4)^T$. Berechne $\|Q\,x\|_2$.	