

# Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18

## Verständnisfragen – Hausübung 6

**VF-1:** Seien  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $QR = A$  eine Zerlegung von  $A$  mit  $Q$  orthogonal und  $R$  eine rechte, obere Dreiecksmatrix. Weiter seien  $b \in \mathbb{R}^n$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	$Ax = b \Leftrightarrow Rx = Q^T b$	
2.	$\kappa_2(A) = \kappa_2(Q^{-1})\kappa_2(R)$	
3.	Zur Lösung von $Ax = b$ über die QR-Zerlegung muss $Q$ explizit bestimmt werden.	
4.	$\text{Rang}(A) = \text{Rang}(R)$	
5.	Gib das kleinste $\beta$ an, für das die Ungleichung $\ Qx\ _2 \leq \beta \ x\ _2$ allgemein gültig ist.	

**VF-2:** Es sei  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Householder-Transformation und  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Einheitsmatrix. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch bzw. gib den numerischen Wert an!

1.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$ , so dass $Q = I - \frac{vv^T}{v^T v}$ .	
2.	Es gilt stets $Q = Q^T$ .	
3.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$ , so dass $Qy = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$ .	
4.	Es existiert stets ein $v \in \mathbb{R}^n$ , so dass für alle $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y^T v = 0$ gilt: $Qy = y$ .	
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Um $A$ mit Householdertransformationen in eine obere Dreiecksmatrix $R$ zu überführen benötigt man etwa $\alpha n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib $p$ an.	

**VF-3:** Es sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Summe zweier orthogonaler $m \times m$ - Matrizen ist wieder eine orthogonale Matrix.	
2.	Das Householder-Verfahren zur Berechnung einer $QR$ -Zerlegung von $A$ ist ohne Pivotisierung nicht stabil.	
3.	Die einzelnen Schritte des Givens-Algorithmus zur $QR$ -Zerlegung von $A$ lassen sich geometrisch als Drehungen interpretieren.	
4.	Eine Givens-Rotation wird durch eine symmetrische Matrix beschrieben.	
5.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Um $A$ mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix $R$ zu überführen benötigt man etwa $\alpha n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib $p$ an.	
6.	Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Um $A$ mit Givens-Rotationen in eine obere Dreiecksmatrix $R$ zu überführen benötigt man etwa $\alpha n^p$ Operationen (gemäß Vorlesung). Gib $\alpha$ an.	

**VF-4:** Es seien  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , mit  $\text{Rang}(A) = n \leq m$ , und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Weiter seien  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  eine orthogonale Matrix und  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine obere Dreiecksmatrix so, dass  $QA = \begin{pmatrix} R \\ \emptyset \end{pmatrix}$  gilt. Weiter sei  $x^* \in \mathbb{R}^n$  die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$ .

1.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \min \Leftrightarrow A^T(Ax - b) = 0$ .	
2.	Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Q^T b\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ .	
3.	Es sei $Qb = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ , mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ , $b_2 \in \mathbb{R}^{m-n}$ . Dann gilt: $x^* = R^{-1}b_1$ .	
4.	Die Matrix $R$ kann man über Givens-Rotationen bestimmen.	
5.	Es sei $QA = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$ die $QR$ -Zerlegung von $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Bestimme $ r $ .	