

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18

Verständnisfragen – Hausübung 7

| | | |
|--|--|----------------|
| VF-1: Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch! | | |
| 1. | Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $m^2 n$. | falsch |
| 2. | Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist proportional zu $n^2 m$. | wahr |
| 3. | Der Aufwand zur Berechnung von $A^T A$ ist stets größer als der zum Lösen der Normalgleichungen. | wahr |
| 4. | Zur Lösung der Normalgleichungen verwendet man das Cholesky-Verfahren, weil das Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen bei der LDL^T -Zerlegung ungefähr halb so viele Operationen benötigt wie das bei einer LR -Zerlegung. | falsch |
| 5. | Zur Berechnung der LDL^T -Zerlegung von $A^T A$ benötigt man etwa αn^p Operationen. Gib α an. | 0.16667 |

| | | |
|---|---|----------|
| VF-2: Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\ Ax - b\ _2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n , die Cholesky-Zerlegung $A^T A = LDL^T$ und die Lösung des Problems wird mit x^* bezeichnet. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch! | | |
| 1. | Es gilt $L^T x^* = D^{-1} y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = b$ ist. | falsch |
| 2. | Die Normalgleichungen lassen sich immer mit Gauß-Elimination ohne Pivottisierung lösen. | wahr |
| 3. | Wenn die Spalten von A orthonormal sind, dann ist x^* auch die Lösung von $\ x - A^T b\ _2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$. | wahr |
| 4. | Es gilt stets $\ LDL^T x^* - A^T b\ _2 = 0$. | wahr |
| 5. | Zur Berechnung der LDL^T -Zerlegung von $A^T A$ benötigt man etwa αn^p Operationen. Gib p an. | 3 |

| | | |
|--|---|-----------------|
| VF-3: Mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\ Ax - b\ _2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n}$ gelöst werden. Hierbei habe die Matrix A den Rang n , und die Lösung des Problems wird mit x^* bezeichnet. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch! | | |
| 1. | Wegen $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung des Ausgleichsproblems immer ungeeignet. | falsch |
| 2. | Die Normalgleichungen lassen sich mit dem Cholesky-Verfahren lösen, nicht aber mit Gauß-Elimination mit Pivottisierung. | falsch |
| 3. | Mit der Cholesky-Zerlegung $A^T A = LDL^T$ gilt stets $L^T x^* = D^{-1} y$, wobei y die Lösung der Gleichung $Ly = A^T b$ ist. | wahr |
| 4. | Es gilt stets $\ Ax^* - b\ _2 = \ LDL^T x^* - A^T b\ _2$. | falsch |
| 5. | Für welche α ist die Matrix $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \alpha \end{pmatrix}$ orthogonal? | -0.70711 |

| | | |
|--|--|----------|
| VF-4: Mit mit $m > n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ soll das lineare Ausgleichsproblem $\ Ax - b\ _2 \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}}$ gelöst werden. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch! | | |
| 1. | Die Normalgleichungen tragen ihren Namen, weil das damit berechnete Residuum senkrecht auf b steht. | falsch |
| 2. | Wegen $\kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$ sind die Normalgleichungen für die numerische Lösung großer Gleichungssysteme besonders geeignet. | falsch |
| 3. | Im Gegensatz zu Givens-Rotationen lässt sich mit Householder-Spiegelungen das Residuum $\ Ax - b\ _2$ nicht direkt aus dem transformierten System ablesen, sondern man muss erst $Ax - b$ explizit ausrechnen. | falsch |
| 4. | Bei der Verwendung einer QR -Transformation (Givens/Householder) muss die Matrix Q nicht explizit aufgestellt werden, um die Lösung x zu erhalten. | wahr |
| 5. | Es sei $A = \begin{pmatrix} \cos(0.5) & \sin(0.5) \\ -\sin(0.5) & \cos(0.5) \end{pmatrix}$. Berechne $\ A\ _2$. | 1 |

| | | |
|---|--|---------------|
| VF-5: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit vollem Rang und $m > n$, eine QR -Zerlegung $A = QR$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Es seien $Q^T A = R := \begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $\tilde{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $Q^T b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ mit $b_1 \in \mathbb{R}^n$ und $b_2 \in \mathbb{R}^{(m-n)}$. Sei x^* die Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems. | | |
| 1. | Es gilt $\det R \neq 0$. | falsch |
| 2. | Das Residuum des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems ist $\ b_1\ _2$. | falsch |
| 3. | Es gilt $\ Ax - b\ _2 = \ Rx - Q^T b\ _2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. | wahr |
| 4. | Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist gegeben durch $x^* = R^{-1}Q^T b$. | falsch |
| 5. | Es seien $Q = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ -0.8 & 0.6 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{pmatrix}$. Berechne $\kappa_2(A)$. | 1.3333 |

| | | |
|---|--|----------------|
| VF-6: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 0.1 + \frac{1}{2} \sin(x)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. | | |
| 1. | Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 0]$ erfüllt. | falsch |
| 2. | Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt. | wahr |
| 3. | Das Problem $x = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, hat eine eindeutige Lösung. | wahr |
| 4. | Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$. | wahr |
| 5. | Berechne x_2 zu $x_0 = 0$. | 0.14992 |