Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18
Verständnisfragen – Übung 7

VF-1: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $A = Q\,R$ eine Q-R-Zerlegung von A, mit einer oberen Dreiecksmatrix R. Weiterhin seien $H_1, \ldots, H_k$ Householder-Transformationen mit $Q^T = H_k \ldots H_2\,H_1$.

1.	Für jede symmetrische orthogonale Matrix Q gilt $Q^2 = I$.	
2.	Es sei $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$ mit $\lvert\alpha\rvert = 1$. Dann ist A eine orthogonale Matrix.	
3.	Es gilt $\lvert\det(A)\rvert = \lvert\det(R)\rvert$.	
4.	Es gilt $A^T A = R^T R$.	
5.	Es seien $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und Q_v die Householder Transformation bezüglich v. Geben Sie $e_1^T\,Q_v\,v$ an.	

VF-2: Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, mit $\mathrm{Rang}(A) = n < m$, und $b \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix so, dass $Q\,A = R$ gilt. Sei $x^\star \in \mathbb{R}^n$ die eindeutige Minimalstelle des Minimierungsproblems $x^\star = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|A\,x - b\|_2$. Weiter sei $\Theta \in \big[0, \frac{\pi}{2}\big)$ der Winkel zwischen $A\,x^\star$ und b.

1.	Je kleiner der Winkel Θ, desto schlechter ist das Problem konditioniert.	
2.	Es gilt $\|A\,x - b\|_2 = \|R\,x - Q\,b\|_2$ für beliebiges $x \in \mathbb{R}^n$.	
3.	Die Matrix R kann man über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung bestimmen.	
4.	Es gilt $A\,x^\star - b \perp \mathrm{Bild}(A)$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimme Θ.	

VF-3: Gegeben seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m > n$, $Rang(A) = n$ und eine rechte Seite $b \in \mathbb{R}^m$. Es sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems. Weiter sei $\Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ der Winkel zwischen $A\,x^\star$ und b.		
1.	x^* ist Lösung von $A^T A x^* = A^T b$.	
2.	Die Matrix $A^T A$ ist symmetrisch positiv definit.	
3.	D er Vektor $Ax^* - b$ steht senkrecht auf Ax^*.	
4.	Sei $\tilde{x}^*$ die Lösung des linearen Ausgleichsproblems bei gestörten Daten $\tilde{b}$. Für die Kondition des linearen Ausgleichsproblems bezüglich Störungen in b gilt: $\frac{\|\tilde{x}^* - x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \leq \kappa_2\,(A)^2\,\frac{\left\|\tilde{b} - b\right\|_2}{\|b\|_2}$.	
5.	Es seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix}$. Berechne $\cos(\Theta)$.	

VF-4: Es seien $0 < a \in \mathbb{R}$ und $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $\Phi(x) = x/2 + a/(2\,x)$.		
1.	$x^\star = \sqrt{a}$ ist ein Fixpunkt von Φ.	
2.	Das Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle Startwerte $x_0 > 0$ quadratisch gegen $\sqrt{a}$.	
3.	Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert nur, falls x_0 hinreichend nahe am Fixpunkt gewählt wird.	
4.	Die Fixpunktiteration $x_{i+1} := \Phi(x_i)$ konvergiert für alle $x_0 > \sqrt{a}$ und die Folge $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend.	
5.	Bestimme Sie x_2 für $a = 9$ und $x_0 = 4$.	