

Numerische Mathematik I für Ingenieure SS18

Verständnisfragen – Hausübung 8

VF-1: Mit $k \in \mathbb{N}$ und den Iterationswerten $x_k \in \mathbb{R}$ gelte $x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p > 1$ gegen x^* , wenn $c > 0$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $ x_{k+1} - x^* \leq c x_k - x^* ^p$ für alle $k \geq k_0$ gilt.	wahr
2.	Die Folge $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert mit mindestens der Ordnung $p = 1$ gegen x^* , wenn $c > 1$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass $ x_{k+1} - x^* \leq c x_k - x^* $ für alle $k \geq k_0$ gilt.	falsch
3.	Ein iteratives Verfahren hat die Konvergenzordnung $p > 1$, wenn sich die Anzahl gültiger Stellen asymptotisch (d. h. für $k \rightarrow \infty$) von Iterationsschritt zu Iterationsschritt um den Faktor p vergrößert.	wahr
4.	Je größer die Konvergenzordnung p ist, desto kleiner ist das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $x_k = x^*$.	falsch
5.	Es seien nun zusätzlich $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion Φ und $\Phi'(x^*) = 0$. Dann ist die Konvergenzordnung mindestens p . Gib p an.	2

VF-2: Es sei $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und für $x^* \in \mathbb{R}$ gelte $\Phi(x^*) = x^*$ und $|\Phi'(x^*)| < 1$. Mit $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} := \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!

1.	Die Fixpunktiteration konvergiert stets, wenn $ x_0 - x^* $ hinreichend klein ist.	wahr
2.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration kann größer als 2 sein.	wahr
3.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, ist die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration größer als 1.	wahr
4.	Für $\Phi(x) = 5 \arctan(x) + 8$ konvergiert das Fixpunktverfahren für beliebige Startwerte $x_0 \in \mathbb{R}$ gegen den eindeutigen Fixpunkt von Φ in \mathbb{R} .	wahr
5.	Es sei wieder $\Phi(x) = 5 \arctan(x) + 8$. Gib für das Intervall $[8, 200]$ die bestmögliche Kontraktionszahl L an.	0.076923

VF-3: Es seien $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und x^* so, dass $\Phi(x^*) = x^*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.

1.	Falls $ \Phi'(x^*) < 1$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $ x_0 - x^* $ hinreichend klein.	wahr
2.	Falls $ \Phi'(x^*) > 1$ gilt, so existiert kein $x_0 \neq x^*$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$.	falsch
3.	Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist in der Regel 1.	wahr
4.	Falls $\Phi'(x^*) = 0$ gilt, so konvergiert die Fixpunktiteration für alle Startwerte x_0 mit $ x_0 - x^* $ hinreichend klein, und die Konvergenzordnung ist größer als 1.	wahr

VF-4: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = \frac{1}{1+x}$, $x \neq -1$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.

1.	Die Aufgabe $\Phi(x) = x$ hat eine eindeutige Lösung.	falsch
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 1]$ erfüllt.	wahr
3.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[\frac{1}{2}, 2]$ erfüllt.	falsch
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > 0$.	wahr
5.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebige $x_0 > \frac{1}{2}$ mit der Konvergenzordnung p . Gib p an..	1

VF-5: Gesucht ist ein Fixpunkt der Abbildung $\Phi(x) = 0.1 + \frac{1}{2} \sin(x)$. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ definiert.		
1.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 0]$ erfüllt.	falsch
2.	Alle Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes sind für Φ auf dem Intervall $[-1, 1]$ erfüllt.	wahr
3.	Das Problem $x = \Phi(x)$, $x \in \mathbb{R}$, hat eine eindeutige Lösung.	wahr
4.	Die Fixpunktiteration konvergiert für beliebiges $x_0 \in \mathbb{R}$.	wahr
5.	Berechne x_2 zu $x_0 = 0$.	0.14992

VF-6: Sei x^* eine Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{x^2} - 4$.		
1.	f hat eine eindeutige Nullstelle x^* .	falsch
2.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = -1$, $b_0 = 1$, konvergiert gegen eine Nullstelle x^* .	falsch
3.	Die Bisektionsmethode, mit Startwerten $a_0 = 0$, $b_0 = 2$, konvergiert gegen eine Nullstelle x^* .	wahr
4.	Das Newton-Verfahren, angewandt auf f , konvergiert für jeden Startwert $x_0 \neq 0$ gegen eine Nullstelle x^* .	wahr
5.	Zur Lösung des Nullstellenproblems von f wird Newton-Verfahren angewandt mit dem Startwert $x_0 = 1$. Geben Sie x_1 an.	1.2358

VF-7: Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und x^* eine Lösung des Nullstellenproblems $f(x) = 0$.		
1.	Das vereinfachte Newton-Verfahren benötigt die Ableitung f' (Jacobi-Matrix) nicht.	falsch
2.	Wenn $f'(x^*)$ regulär ist, so konvergiert das Newton-Verfahren für alle Startwerte die hinreichend nahe bei x^* liegen, und die Konvergenzordnung ist 2.	wahr
3.	Das Sekantenverfahren erlaubt nur die Dimension $n = 1$.	wahr
4.	Eine Dämpfungsstrategie beim Newton-Verfahren gewährleistet für jeden Startwert die Konvergenz des Verfahrens.	falsch
5.	Es seien $f(x) = x^4$, $x_0 = 1$ und $\{x_k, k = 0, 1, \dots\}$ die durch das Newton-Verfahren induzierte Folge. Bestimmen Sie x_2 .	0.5625

VF-8: Es sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Beantworte alle Fragen mit wahr oder falsch!		
1.	Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann existiert in $[a, b]$ genau eine Nullstelle von f .	wahr
2.	Wenn $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sowie $f''(x) > 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann gilt zu dem Startwert $x_0 = a$ für alle Iterationswerte x_i des Newton-Verfahrens $x_i \geq a$.	falsch
3.	Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ sowie $f''(x) < 0$ für alle $x \in [a, b]$ gilt, dann bilden die Iterationswerte des Newton-Verfahrens zu $x_0 = b$ eine monoton fallende Folge.	wahr
4.	Wenn $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$, dann konvergiert die Bisektion stets schneller als das Sekantenverfahren, da sie den Einschluss der Nullstelle garantiert.	falsch